



Sexto
Congreso Nacional de
Riego, Drenaje y Biosistemas
COMIIB- 2021 / Hermosillo, Sonora



Artículo: COMIIB-21027

Hermosillo, Son., del 9 al 11 de junio de 2021

CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA ECUACIÓN DE GREEN Y AMPT USANDO UN ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN NO LINEAL

Sebastián Fuentes^{1*}; Carlos Chávez¹; Carlos Fuentes²

¹ Centro de Investigaciones del Agua, Departamento de Ingeniería de Riego y Drenaje, Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas S.N., Col. Las Campanas, C.P. 76010.
sefuca.1196@gmail.com - 442 205 3566 (*Autor de correspondencia)

² Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Jiutepec, Morelos, 62550. México.

Resumen

Para la descripción del flujo del agua en el suelo se utilizan principalmente la ecuación de Richards o una simplificación como lo es la ecuación de Green y Ampt. La primera puede producir resultados precisos, pero carece de soluciones analíticas generales, por tal motivo se utilizó la ecuación de Green y Ampt que es una forma intermedia de modelar el fenómeno manteniendo bases físico-matemáticas en la representación. La principal ventaja de la ecuación de Green y Ampt es el poco tiempo de cómputo que requiere para su aplicación en comparación con el necesario para ejecutar la ecuación de Richards. En este trabajo, se presenta una metodología para estimar los parámetros de infiltración de la ecuación de Green y Ampt: la conductividad hidráulica a saturación y la succión en el frente de humedecimiento mediante el algoritmo Levenberg-Marquardt. El algoritmo se validó con datos de suelo reportados en la literatura.

Palabras claves: infiltración, conductividad hidráulica a saturación, succión en el frente de humedecimiento, algoritmo Levenberg Marquardt.



Introducción

El riego por gravedad es el método utilizado ampliamente en la aplicación de agua en suelos agrícolas, donde el agua se distribuye sobre el campo y a través de este por medio del flujo vertical en el suelo. Este último fenómeno puede describirse físicamente mediante la ecuación de Richards (1931) que produce resultados precisos, pero carece de soluciones analíticas generales por lo que normalmente se requieren métodos numéricos de alta complejidad para su solución (Damodhara Rao *et al.*, 2006; Malek y Peters, 2011). Como alternativa existen otros modelos aproximados de base física, resultantes de la simplificación de las condiciones iniciales, en particular, la ecuación de Green y Ampt (1911) es una alternativa para simular el proceso de infiltración vertical de agua en el suelo, la cual ha sido utilizada en el riego por gravedad (Chávez *et al.*, 2018; Naghedifar *et al.*, 2020; Saucedo *et al.*, 2015; Tabuada *et al.*, 1995).

La aplicación de la ecuación de Green y Ampt requiere parámetros de las propiedades físicas de los suelos (Ali y Islam, 2018; Damodhara Rao *et al.*, 2006), sin embargo, hay dos parámetros clave que no son experimentalmente viables para medir: la conductividad hidráulica a saturación (K_s) y la succión en el frente de humedecimiento (h_f). La incertidumbre de los valores de estos parámetros hidrodinámicos del suelo se puede considerar un obstáculo para el óptimo diseño del riego, esto debido al alto grado de dificultad para calcularlos, que en la mayoría de las veces depende de la experiencia del modelador. Actualmente se utilizan diferentes enfoques teóricos y empíricos como funciones de pedotransferencia para calcular estos parámetros (Saxton y Rawls, 2006; Trejo-Alonso *et al.*, 2020), mientras que Trejo-Alonso *et al.* (2021) utiliza redes neuronales artificiales con muestras de 900 parcelas de riego, también Chen *et al.* (2015) realizó la optimización de parámetros mediante un ajuste de tres puntos en una curva de infiltración bajo condiciones de lluvia.

Materiales y Métodos

La ecuación de Green y Ampt

La ecuación de Green y Ampt se establece a partir de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy (Darcy, 1856) con las siguientes hipótesis: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme $\theta = \theta_0$ b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática: $\psi = h \geq 0$, donde h es el tirante de agua, c) existe un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa: $\psi = -h_f < 0$, donde h_f es la succión en el frente de humedecimiento y d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento está completamente saturada (flujo en pistón): $\theta = \theta_s$ y $K = K_s$, donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación. La ecuación diferencial ordinaria resultante es la siguiente:

$$V_i = \frac{dl(t)}{dt} = K_s \left(1 + \frac{(h_{sup} + h_f)(\theta_s - \theta_0)}{l} \right) \quad (1)$$

donde I es la lámina infiltrada acumulada; t el tiempo; K_s la conductividad hidráulica a saturación; θ_s y θ_0 , los contenidos de humedad a saturación e inicial, respectivamente; la succión en el frente de humedecimiento (flujo en pistón), y h la lámina de agua sobre la superficie del suelo (presión positiva).

Si el tirante de agua se considera independiente del tiempo, la ecuación (1) se integra analíticamente con la condición inicial $I = 0$ en $t = 0$, resultando:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right) \quad ; \quad \lambda = (h_{\text{sup}} + h_f)(\theta_s - \theta_0) \quad (2)$$

Cuando se desprecia la cantidad de agua que fluye en el infinito, la lámina infiltrada como lo suponen Green y Ampt es igual al volumen por unidad de área almacenado en el pistón $I(t) = \Delta\theta z_f(t)$ con $\Delta\theta = (\theta_s - \theta_0)$ y $z_f(t)$ es el frente del pistón (Fuentes *et al.*, 2012).

Optimización de parámetros

En los modelos de regresión no lineal, cada observación y_i se escribe en términos de una función de respuesta no lineal $f(x_i; \beta)$. Una diferencia importante de los modelos de regresión no lineal es que el número de parámetros β de la regresión no se relaciona directamente con el número de variables x_i en el modelo (Cornejo Zuniga y Rebolledo Vega, 2016). Para estimar los parámetros K_s y h_f a partir de una prueba de infiltración, se utiliza el algoritmo Levenberg-Marquardt (Moré, 1978), el cual ha sido una técnica estándar para problemas de mínimos cuadrados no lineales. Los parámetros (p) se calculan con la siguiente expresión de manera iterativa:

$$p = - \left(J(x_k)^T J(x_k) + \mu I_d \right)^{-1} J(x_k)^T r(x_k) \quad (3)$$

donde $J(x_k)$ es la matriz Jacobiana relacionada con las variaciones de la función de infiltración respecto a cada uno de los parámetros a optimizar; I_d es la matriz identidad; $r(x_k)$ el vector de diferencias entre la lámina infiltrada observada y la calculada con el algoritmo de optimización; μ , se denomina parámetro de amortiguación que se ajusta en cada iteración. La matriz Jacobiana se calcula como:



$$J(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial K_s} & \frac{\partial I_1}{\partial h_f} \\ \frac{\partial I_2}{\partial K_s} & \frac{\partial I_2}{\partial h_f} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_m}{\partial K_s} & \frac{\partial I_m}{\partial h_f} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde I_m es la ecuación de Green y Ampt y m indica el número de datos medidos. En este algoritmo, los valores de la matriz Jacobiana se aproximan por diferencias finitas, para mejorar el tiempo de cómputo.

La optimización de los parámetros es codificada en un programa con funciones y subrutinas, en donde se inicia con un par de valores iniciales para posteriormente calcular la matriz Jacobiana y el vector de errores, con esto es posible resolver la ecuación (3) que da como resultado un par de valores nuevos, con lo cual se puede recalculer el vector de errores para revisar si es menor que el de la iteración anterior, si es menor que el anterior; revisa si pasan por una tolerancia asignada, si pasan termina el programa e imprime resultados (Figura 1).

Parámetros de entrada

Los datos que se requieren son los contenidos de humedad inicial y a saturación, y los datos obtenidos de una prueba de infiltración. Para obtener el contenido de humedad inicial (θ_0), la variable de acceso son la densidad aparente del suelo (ρ_t) y el contenido gravimétrico de humedad (ω_0):

$$\theta_0 = \left(\frac{\rho_t}{\rho_w} \right) \omega_0 \quad (5)$$

La porosidad (ϕ) es el volumen del espacio vacío de los medios porosos y se calcula a partir de la densidad aparente y la densidad de las partículas de cuarzo (ρ_s):

$$\phi = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_s} \quad (6)$$

donde $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$ y ρ_w es la densidad del agua.

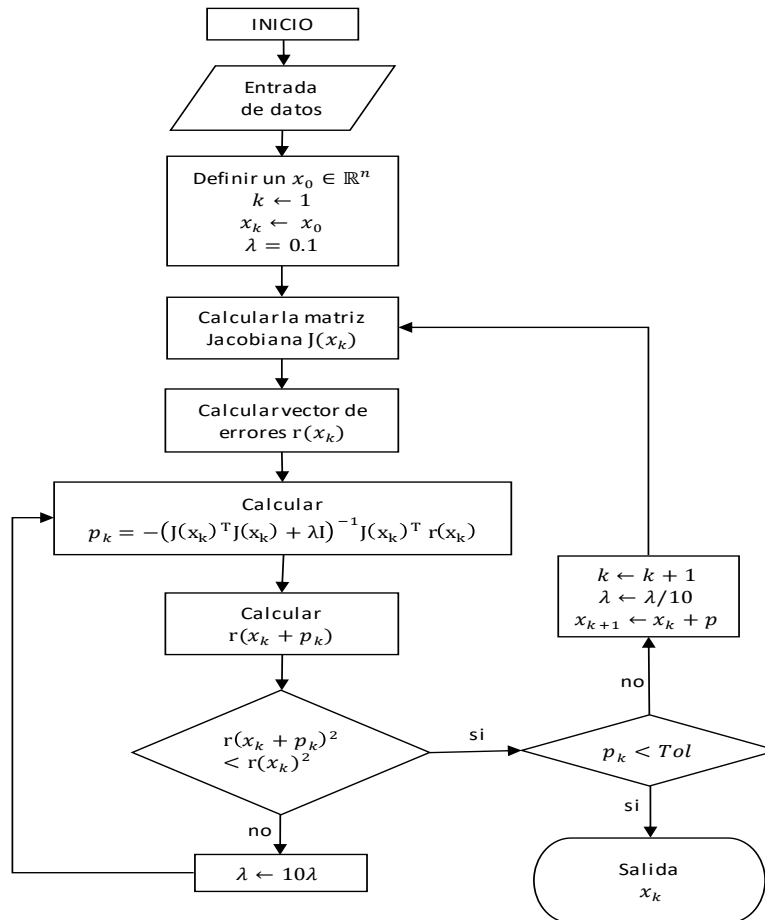


Figura 1. Diagrama de flujo de Levenberg-Marquardt para la optimización de parámetros.

El contenido de humedad a saturación (θ_s) es el volumen de agua contenido en el espacio poroso, normalmente asimilada a la porosidad volumétrica (ϕ) por la siguiente desigualdad: $0 \leq \theta_s \leq \phi$, sin embargo, es importante denotar que en un suelo aparentemente saturado con agua, generalmente queda atrapado una cierta cantidad de aire, por lo tanto el contenido volumétrico de humedad a saturación puede ser tomado como $\theta_s = 0.9\phi$ (Haverkamp *et al.*, 2016; Rogowski, 1971). En este trabajo θ_s será tomado como la porosidad total (ϕ): $\theta_s \approx \phi$.

Experimento de laboratorio

Se tomaron muestras de suelo de parcelas agrícolas de la región de San Juan del Río, Querétaro. El suelo se tamizó con la malla número 10 (2 mm) y se secó al aire libre por un tiempo de 1 semana con la finalidad de que el perfil de humedad inicial en el suelo fuera constante. Se calculó el contenido de humedad inicial antes de ser colocado en la columna.

Para realizar la prueba de infiltración se utilizaron dos columnas de acrílico de diferente longitud y sección transversal circular, ambas con una placa porosa cubierta por un filtro colocada en su parte inferior con el propósito de retener el suelo y permitir la salida del

agua y el aire (ver Figura 2). El interior de las columnas se recubrió parcialmente con cera, con la finalidad de crear una rugosidad entre el suelo y la columna de acrílico. El suelo fue colocado en la columna por capas de 5 cm de espesor a una densidad similar a la obtenida en campo y durante la prueba de infiltración se trató de mantener una carga (h) constante.

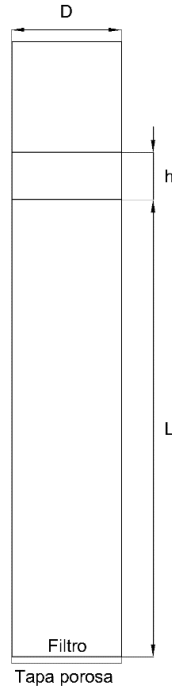


Figura 2. Representación esquemática de una columna de suelo.

El par de parámetros iniciales está basado en la textura del suelo mostrada en el Cuadro 1, por lo cual es necesario hacer un análisis de ésta. Se utilizó el método de Bouyoucos para medir la densidad de las partículas en suspensión por el hidrómetro a diferentes tiempos y mediante el uso del triángulo de texturas, poder determinar los parámetros con los cuales se empieza la primera iteración del algoritmo de Levenberg-Marquardt.

Cuadro 1. Parámetros medios de la ecuación de infiltración de Green y Ampt (1911) utilizados para hacer el diseño de riego por gravedad, en función de la textura del suelo (Rendón *et al.*, 2012).

Textura del suelo	Parámetros			
	θ_o (cm ³ /cm ³)	θ_s (cm ³)	h_f (cm)	K_s (cm/h)
Arcilla	0.36	0.49	140.26	0.05
Arcillo limoso	0.32	0.48	100.16	0.05
Franco arcillo limoso	0.26	0.49	60.12	0.15
Franco arcilloso	0.25	0.48	36.00	0.4
Arcilla arenosa	0.25	0.42	25.72	0.5
Limo	0.14	0.50	30.52	0.8
Franco	0.20	0.46	20.04	1.5
Franco Limoso	0.17	0.55	30.07	1.0
Franco arcillo arenoso	0.18	0.42	35.61	2.0
Franco arenoso	0.16	0.46	10.00	2.9

Resultados y Discusión

El programa de cómputo

El algoritmo de optimización se programó en el lenguaje Visual Basic .NET, utilizando el entorno de desarrollo integrado Microsoft Visual Studio 2019. Puede ser instalado en cualquier plataforma de Windows 10 y la velocidad en la memoria RAM que se requiere es mínima, por lo que cualquier ordenador con un procesador de 4 GB lo soporta sin problemas. El programa consta de cuatro secciones principales: A) Menú principal, B) Datos desplegados de una prueba de infiltración, C) Resultados gráficos de la lámina de riego medida vs la optimizada y D) Resultados de la optimización.

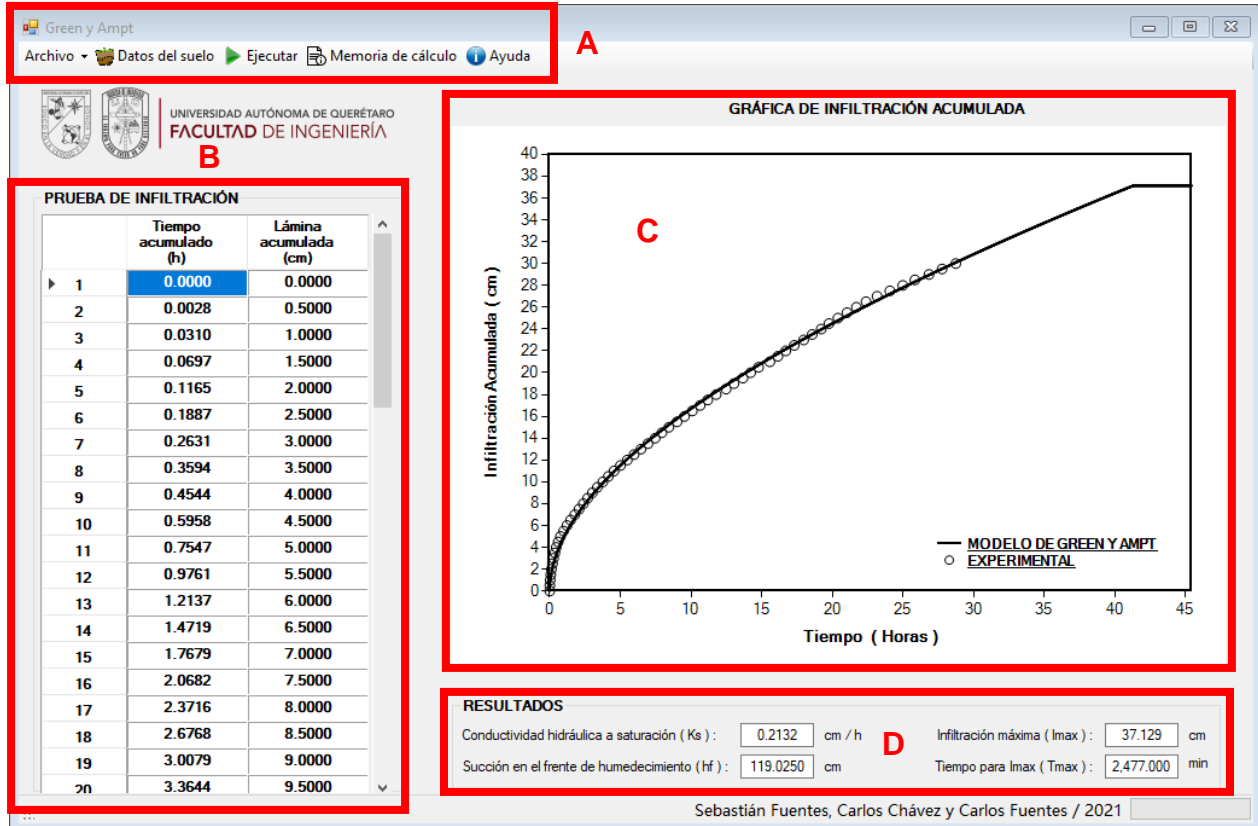


Figura 3. Ventana principal del programa de cómputo desarrollado.

En el Cuadro 2 se muestran las rutinas utilizadas para el correcto funcionamiento del programa de cómputo desarrollado, además se describe la acción que realiza cada una de ellas.



Cuadro 2. Rutinas utilizadas en el programa de cómputo.

Título	Rutina	Acción
Archivo	Importar datos de Excel	Abre datos de una prueba de infiltración en formato *.xls (tiempo y lámina infiltrada acumulada)
	Abrir ejemplos	Se cargan datos de una prueba de infiltración, donde también se incluyen sus parámetros de entrada
	Guardar datos optimizados	Guarda los datos simulados con los parámetros optimizados en formato *.xls (tiempo y lámina infiltrada acumulada)
	Salir del programa	Cierra el programa.
Datos del suelo	Datos de entrada	Muestra una ventana en la cual el usuario debe introducir los parámetros de entrada necesarios (densidad aparente, humedad inicial, carga superficial, longitud de columna de la prueba de infiltración y textura del suelo).
Ejecutar	Ejecutar	Inicia el proceso de optimización de parámetros, al mismo tiempo que grafica en tiempo real las iteraciones.
Memoria de cálculo	Memoria de cálculo	Muestra una ventana con los resultados en cada iteración realizada por el algoritmo de Levenberg-Marquardt.
Ayuda	Ayuda	Abre una ventana donde se muestran los datos de contacto de los autores.

Pruebas de infiltración

Los resultados obtenidos del análisis de suelo de las propiedades físicas se muestran en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Propiedades físicas de los sitios de estudio.

Muestra de suelo	ρ_t (g/cm ³)	θ_o (cm ³ /cm ³)	h (cm)	$\theta_s = \phi$ (cm ³ /cm ³)	L (cm)	Textura
S1	1.0810	0.1462	6	0.5921	70	Franco arenoso
S2	1.1588	0.1259	6	0.5627	85	Arcilloso
S3	1.1713	0.0280	5	0.5580	85	Franco arenoso

Con los datos de las condiciones iniciales y la lámina infiltrada en el tiempo, se procedió a optimizar los parámetros K_s y h_f de la ecuación de Green y Ampt en función de la textura del suelo. Los resultados de la optimización se muestran respectivamente para cada sitio en la Figura 4, donde se aprecia el ajuste del modelo de Green y Ampt a los valores medidos.

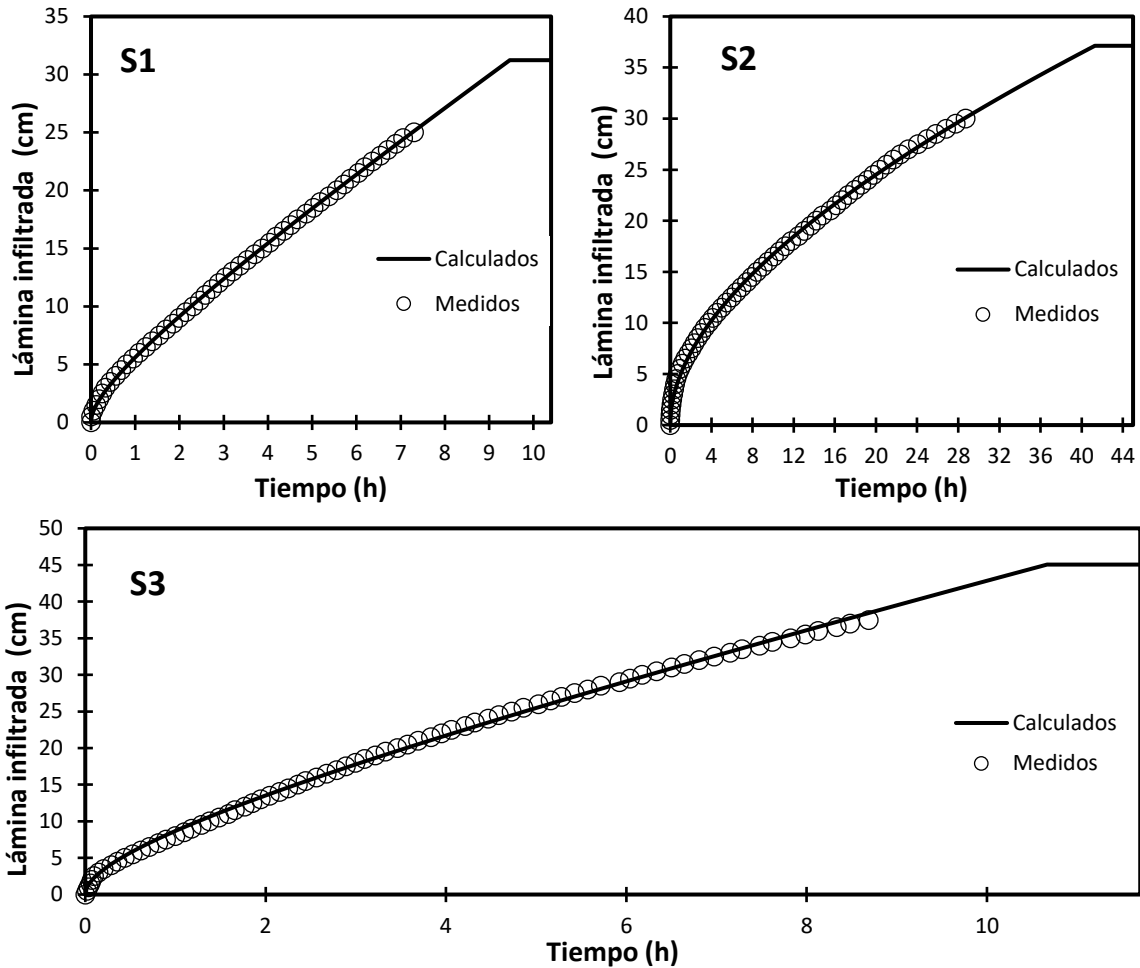


Figura 4. Comparación entre la lámina infiltrada medida y la calculada con la ecuación de Green y Ampt.

El resultado de la optimización obtenida es presentado en el Cuadro 4, donde además se muestra la raíz del error cuadrático medio (RECM) que es resultado de la lámina infiltrada medida y la lámina infiltrada obtenida con el modelo. Se observan errores menores a 0.5 cm, lo cual indica que la optimización de parámetros con valores iniciales relacionados a la textura del suelo funciona de manera adecuada, es importante recalcar que a partir de la gráfica anterior podemos establecer, visualmente, el adecuado ajuste que presenta la ecuación de Green y Ampt al optimizar sus parámetros a una curva de infiltración de datos medidos.

Cuadro 4. Valores optimizados del sitio analizado en función de la textura del suelo.

Sitio	K_s (cm/h)	h_f (cm)	RECM (cm)
S1	2.4869	2.0000	0.1323
S2	0.2132	119.0250	0.3052
S3	2.8071	10.0561	0.4236

Validación numérica

La validación del algoritmo numérico se realizó para eliminar errores de programación y revisar la consistencia de soluciones correctas. Se usaron datos reportados en la literatura cuyos resultados se obtuvieron mediante la solución unidimensional de la ecuación de Richards (Chávez *et al.*, 2016). Los datos utilizados corresponden a un suelo arcilloso de la Chontalpa, Tabasco (Fuentes *et al.*, 2010). Los valores de los parámetros de este suelo son $\rho_t = 1.26 \text{ g/cm}^3$, $\theta_0 = 0.4 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $h = 10 \text{ cm}$, $\phi = 0.5245$, $\theta_s = \phi$, $L = 100 \text{ cm}$. Mediante el uso del programa de cómputo se procedió a optimizar los parámetros K_s y h_f de la ecuación de Green y Ampt en función de la textura del suelo (Figura 5).

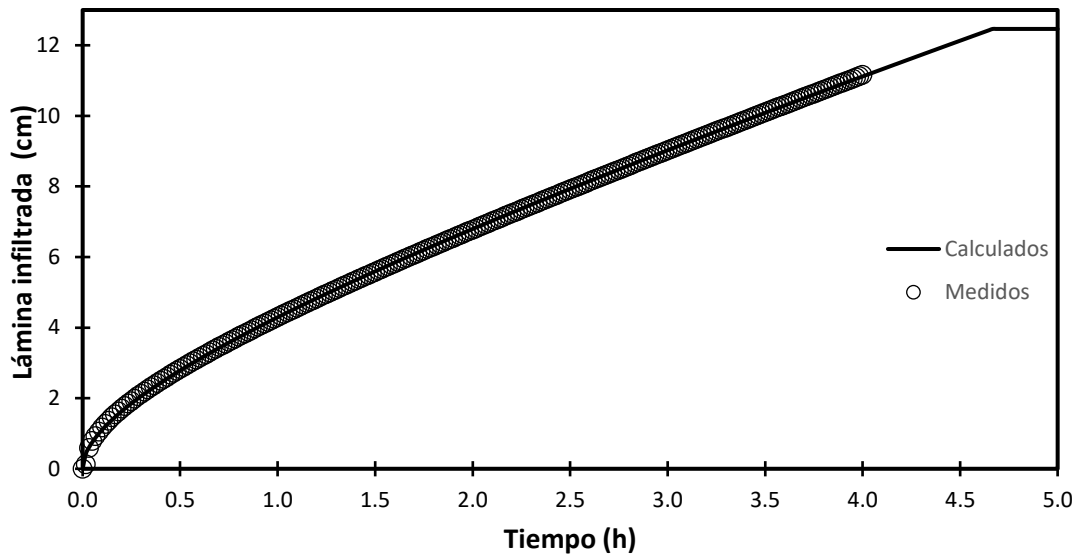


Figura 5. Comparación de la lámina infiltrada obtenida con la ecuación de Richards y la modelada con la ecuación de Green y Ampt.

Al comparar el resultado obtenido y el reportado en la literatura (Cuadro 5) se observa que no existe una diferencia considerable, ya que de igual manera se considera la raíz del error cuadrático medio y ésta nos indica que existe poca variación del resultado medido contra el modelo de Green y Ampt optimizando K_s y h_f .

Cuadro 5. Valores de los parámetros optimizados comparados con los de la literatura.

Experimento	K_s reportado (cm/h)	K_s optimizado (cm/h)
Fuentes <i>et al.</i> (2010)	1.86	1.60

El parámetro h_f es característico de la ecuación de Green y Ampt, por tal razón no puede ser comparado con ningún otro parámetro de otras ecuaciones, sin embargo, el valor se ajusta dependiendo de las proporciones de arena, limo y arcilla del suelo, y se puede



considerar inversamente proporcional a K_s , ya que cuando este disminuye el h_f aumenta.

Sensibilidad de los parámetros optimizados a la duración de la prueba de infiltración

Se requirió un análisis de sensibilidad de los parámetros de Green y Ampt para verificar como los errores de estimación de los dos parámetros se propagan a las estimaciones de la infiltración. Se hicieron optimizaciones con los resultados experimentales en diferentes incrementos temporales para cada sitio; para el suelo 1 (S1) se utilizó un $\Delta t = 1h$, para el S2 un $\Delta t = 4h$ y para el S3 un $\Delta t = 1h$. En la Figura 6 se observa que los parámetros presentan la misma tendencia, mientras el K_s disminuye gradualmente el valor de h_f aumenta de la misma forma. El proceso inverso ocurre con la misma tendencia, esto indica que el algoritmo optimiza los valores de acuerdo con la textura del suelo y entre más datos de infiltración se tienen, estos parámetros optimizados pueden variar considerablemente, ya sea disminuyendo o aumentando sus valores de forma gradual e inversamente proporcional entre ellos.

El programa está delimitado para que cada par de nuevos valores que se proponen estén dentro de los límites de los parámetros, es decir $K_s > 0$ y $0 < h_f < 200$. Adicionalmente, se agregó que si la diferencia de parámetros en la iteración actual con la anterior es menor a 0.00001 % o el número de iteraciones es igual a 20 termine y muestre los resultados.

Es importante recalcar que los parámetros tienen que ser ajustados de acuerdo a la textura del suelo, esto debido a la importancia de la ecuación (7):

$$S^2 = 2K_s h_f \Delta \theta \quad (7)$$

donde S es la sorbilidad del medio poroso (Philip, 1957). Sin la utilización de parámetros iniciales relacionados a la textura del suelo, pueden existir una infinidad de parámetros de ajuste relacionados a los datos medidos en una prueba de infiltración.

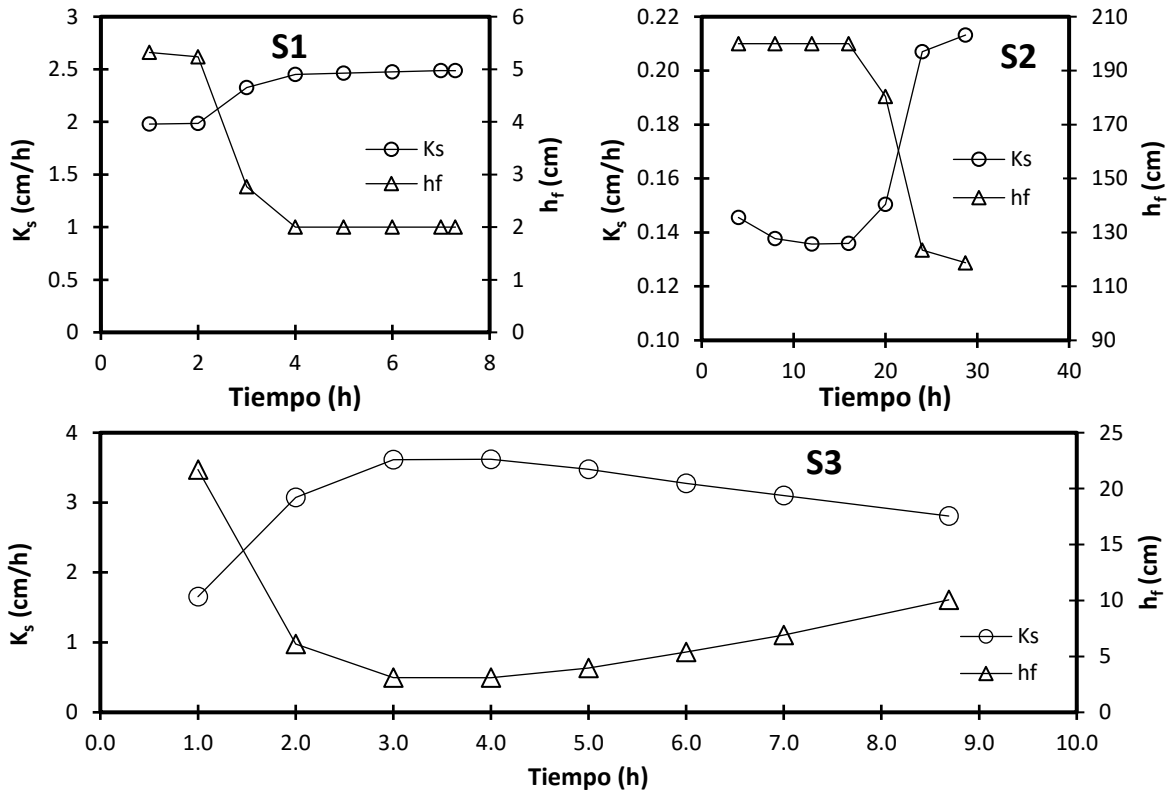


Figura 6. Variación de los parámetros K_s y h_f para diferentes Δt .

Conclusiones

Se implementó un algoritmo de optimización para calcular los parámetros K_s y h_f mediante la solución del problema inverso de la ecuación de Green y Ampt, que incluyó la revisión del funcionamiento del código y la validación experimental con pruebas de infiltración. El algoritmo se puso a prueba utilizando datos de infiltración tomadas de la literatura y los resultados encontrados fueron satisfactorios, dado un criterio de error.

La estimación de los parámetros hidrodinámicos de conductividad hidráulica a saturación y presión en el frente de humedad se realizó aplicando el algoritmo de Levenberg-Marquardt. La principal ventaja de la optimización presentada es el poco tiempo de cómputo que requiere para optimizar los parámetros de la ecuación de Green y Ampt, comparado con la solución de la ecuación de Richards reportado en la literatura. Se mostró que al usar datos de pruebas de infiltración de la literatura, los valores obtenidos de K_s con el algoritmo de optimización no lineal propuesto, son muy similares a los obtenidos con la ecuación de Richards, lo que brinda certeza y confiabilidad al realizar el cálculo de los parámetros.

El análisis de sensibilidad indica que el tiempo de duración de la prueba de infiltración afecta significativamente los valores K_s y h_f , por lo cual es recomendable realizar una prueba de infiltración completa, ya que las variaciones en cuanto a la lámina infiltrada con el paso del tiempo pueden provocar que la curva se ajuste a diferente par de parámetros.



Referencias Bibliográficas

- Ali, S., y Islam, A. (2018). Solution to Green–Ampt infiltration model using a two-step curve-fitting approach. *Environmental Earth Sciences*, 77(7), 1–9. <https://doi.org/10.1007/s12665-018-7449-8>
- Chávez, C., Fuentes, C., y Mota, C. (2016). *Programa para modelar la transferencia de agua usando la ecuación de Richards 1D* (Patent No. INDAUTOR 03-2016-110812360600-01).
- Chávez, C., Mota, C., Fuentes, C., y Quevedo, A. (2018). Modelación bidimensional de la infiltración del agua en surcos aplicando el gradiente conjugado. *Tecnología y Ciencias Del Agua*, 09(1), 89–100. <https://doi.org/10.24850/j-tyca-2018-01-06>
- Chen, L., Xiang, L., Young, M. H., Yin, J., Yu, Z., y Genuchten, M. T. Van. (2015). Optimal parameters for the Green-Ampt infiltration model under rainfall conditions. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 63(2), 93–101. <https://doi.org/10.1515/johh-2015-0012>
- Cornejo Zuniga, O., y Rebolledo Vega, R. (2016). Estimación De Parámetros En Modelos No Lineales: Algoritmos Y Aplicaciones Estimation of Parameters in Nonlinear Models: Algorithms and Applications. *Revista EIA*, 13(25), 81–98. <https://doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.81-98>
- Damodhara Rao, M., Raghuwanshi, N. S., y Singh, R. (2006). Development of a physically based 1D-infiltration model for irrigated soils. *Agricultural Water Management*, 85(1–2), 165–174. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2006.04.009>
- Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. In *Recherche* (p. 647). Dalmont, Paris.
- Fuentes, C., Chávez, C., y Zataráin, F. (2010). Una solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero: Aplicación al riego por gravedad. *Tecnología y Ciencias Del Agua*, 1(3), 39–49.
- Fuentes, C., Parlange, J., y Palacios Vélez, Ó. (2012). Teoría de la infiltración. In C. Fuentes y L. Rendón (Eds.), *Riego por gravedad* (1st Ed., pp. 142–197). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Green, W. H., y Ampt, G. A. (1911). Studies on Soil Physics. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), 1–24. <https://doi.org/10.1017/S0021859600001441>
- Haverkamp, R., Debionne, S., Angulo-Jaramillo, R., y De Condappa, D. (2016). Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone. *The Handbook of Groundwater Engineering: Third Edition*, 149–190. <https://doi.org/10.1201/9781315371801>
- Malek, K., y Peters, R. T. (2011). Wetting pattern models for drip irrigation: New empirical model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 137(8), 530–536. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0000320](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000320)
- Moré, J. J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory. In *Numerical analysis* (pp. 105–116). <https://doi.org/10.1007/BFb0067700>
- Naghedifar, S. M., Ziaei, A. N., y Ansari, H. (2020). Numerical analysis and optimization of triggered furrow irrigation system. *Irrigation Science*, 38(3), 287–306. <https://doi.org/10.1007/s00271-020-00672-5>
- Philip, J. R. (1957). The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Science*, 84(3), 257–264. <https://doi.org/10.1097/00010694->



195709000-00010

- Rendón, L., Saucedo, H., y Fuentes, C. (2012). Capítulo 7: Diseño del Riego por Gravedad. In C. Fuentes y L. Rendón (Eds.), *Riego por gravedad* (1st Ed., pp. 324–357). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Richards, L. A. (1931). CAPILLARY CONDUCTION OF LIQUIDS THROUGH POROUS MEDIUMS. *Physics*, 1(5), 318–333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Rogowski, A. S. (1971). Watershed Physics: Model of the Soil Moisture Characteristic. *Water Resources Research*, 7(6), 1575–1582. <https://doi.org/10.1029/WR007i006p01575>
- Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. (2015). Diseño de riego por melgas empleando las ecuaciones de Saint-Venant, y Green y Ampt. *Tecnología y Ciencias Del Agua*, 6(5), 103–112.
- Saxton, K. E., y Rawls, W. J. (2006). Soil Water Characteristic Estimates by Texture and Organic Matter for Hydrologic Solutions. *Soil Science Society of America Journal*, 70(5), 1569–1578. <https://doi.org/10.2136/sssaj2005.0117>
- Tabuada, M. A., Rego, Z. J. C., Vachaud, G., y Pereira, L. S. (1995). Modelling of furrow irrigation. Advance with two-dimensional infiltration. *Agricultural Water Management*, 28(3), 201–221. [https://doi.org/10.1016/0378-3774\(95\)01177-K](https://doi.org/10.1016/0378-3774(95)01177-K)
- Trejo-Alonso, J., Fuentes, C., Chávez, C., Quevedo, A., Gutierrez-Lopez, A., y González-Correa, B. (2021). Saturated hydraulic conductivity estimation using artificial neural networks. *Water*, 13(5), 1–15. <https://doi.org/10.3390/w13050705>
- Trejo-Alonso, J., Quevedo, A., Fuentes, C., y Chávez, C. (2020). Evaluation and Development of Pedotransfer Functions for Predicting Saturated Hydraulic Conductivity for Mexican Soils. *Agronomy*, 10(10), 1516. <https://doi.org/10.3390/agronomy10101516>