

**IV CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE**  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



# ENFOQUE FRACCIONAL DE LA INTERACCIÓN FLUIDO-PARTÍCULA Y SUS MODELOS



**J. Roberto Mercado E.**  
**Pedro A. Guido A.**

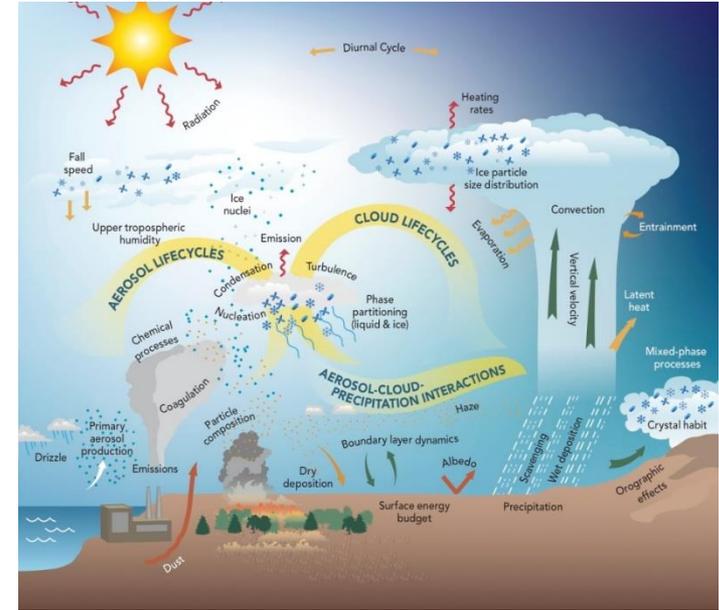
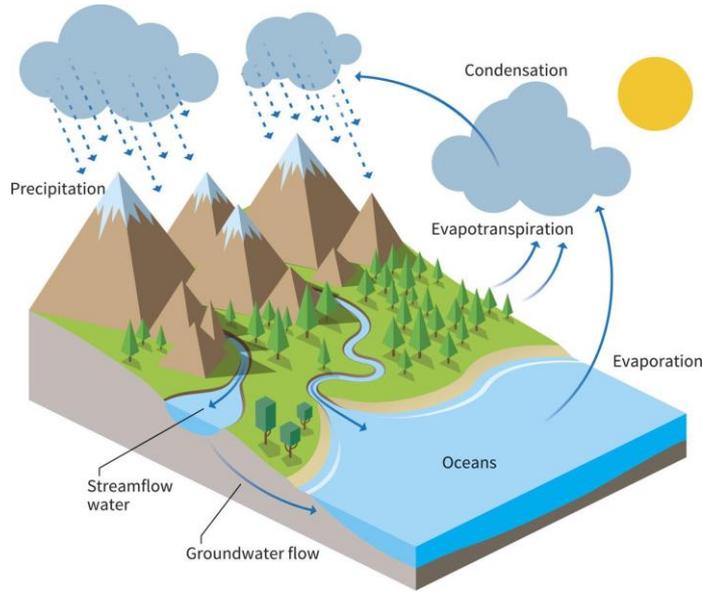
Fecha 17/octubre/2018





# IV CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE

Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.





# IV CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE

Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.





IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Clásico A

$$\beta \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} p = \nu_2 \nabla^2 u_i, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} u^i = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}} p = 0$$

$$F_p = \pi \rho_f \nu^2 \cdot R_{ep}$$

$$F_f = 2\pi \rho_f \nu^2 \cdot R_{ep}$$

$$F_D = F_p + F_f = 3\pi \rho_f \nu^2 \cdot R_{ep}$$

$$R_{ep} = Ud / \nu$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Clásico B

$$F_e = \left( \frac{\rho - \rho_f}{\rho_f} \right) (\rho_f V) g$$

$$F_D = C \rho_f v^2 R_{ep}$$

$$\frac{U}{Bd} = g\Delta, \quad Bd = \frac{1}{18\nu} d^2$$

$$Ud / \nu = d_*^3 F(d_*), \quad F(d_*) = \frac{1}{18}$$

$$d_* = \left( \frac{g\Delta}{\nu^2} \right)^{1/3} d$$



## Clásico: Drag

$$C_D := \frac{F_D}{\frac{\pi}{8} \rho_f U_0^2 d_s^2}$$

$$C_D = \frac{A}{R_{ep}} + B$$

Ossen:

$$F_D = 3\pi(\rho_f v^2) \left( R_{ep} + \frac{3}{16} R_{ep}^2 \right), \quad r \gg d/2$$

$$\frac{A}{R_{ep}} + B = C \frac{d_*^3}{(R_{ep})^2}$$

$$R_{ep} = d_*^{3/2} F(d_*)$$

$$F(d_*) = \sqrt{\left( \frac{A}{2Bd_*^{3/2}} \right)^2 + \frac{C}{B}} - \sqrt{\left( \frac{A}{2Bd_*^{3/2}} \right)^2}$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Generalización A

$$(C_1 v_\alpha \phi'(d/2r)) U^b = g \Delta d^c$$

$$C_1 v_\alpha \phi'(d/2r) \propto 1/F(d_*)$$

$$\frac{1}{(1/C_1 v_\alpha \phi'(d/2r)) d^c} \mapsto Bd \mapsto C_\beta D_d^s d^2$$

$$g \Delta d^c \mapsto CD_{d_*}^s (d_*)^3$$

$$\frac{U^b}{C_\beta D_d^s d^2} = g \Delta$$

$$\left( \frac{Ud/v}{CD_{d_*}^s (d_*)^3} \right)^b = F(d_*)$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Generalización B

$$c = (1 - \beta) \frac{1}{\sigma} + \beta 2$$

$$\frac{\beta_L - \beta_m}{\beta_L - \beta_1} = \left( \frac{1}{\delta} \right)^{m-1}, \quad \frac{1}{\delta} \approx \frac{1}{5}$$

$$\beta_m = \left( \frac{1}{\delta} \right)^{m-1}, \quad \frac{1}{\sigma} \mapsto \frac{1}{\delta}$$

$$c = (1 - \beta) \frac{1}{\delta} + \beta 2$$

$$\beta = \frac{c - 1/\delta}{2 - 1/\delta}, \quad s = (1 - \beta)(2 - 1/\delta), \quad \beta_m = \left( \frac{1}{\delta} \right)^{m-1}$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Rubey generalizado

$$\left(\frac{Ud}{\nu}\right)^b = (d_*)^c F(d_*), \quad F(d_*) = n \sqrt{\frac{cte}{d_*^\sigma} + h} - n \sqrt{\frac{cte}{d_*^\sigma}}$$

$$F(d_*) = \sqrt{\left(\frac{A}{2Bd_*^{3/2}}\right)^2 + \frac{C}{B}} - \sqrt{\left(\frac{A}{2Bd_*^{3/2}}\right)^2}$$

$$d_* = \left(\frac{g\Delta}{\nu^2}\right)^{1/3} d$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Leslie: velocidad “competente”

$$U^2 = kd^{1/3}$$

	b	c	$\beta$	s	m
Leslie	2	1/3	$6.6727 \times 10^{-2}$	1.6667	3

Newton:

$$U = 1.82 \sqrt{g\Delta d}, \quad (b, c) = (2, 1)$$



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Maza y García

$$\frac{U^2}{\left(\frac{4.7}{\sqrt{g R_h^{0.2}}}\right)^2 d^{7/10}} = g\Delta, \quad (b, c) = (2, 7/10)$$

	b	c	$\beta$	s	m
Maza & García	2	7/10	0.27204	1.3	2



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Zanque

$$\left(\frac{Ud}{\nu}\right)^b \approx \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{n-1}{n}} d_*^{b\varepsilon}, \quad b\varepsilon = c + \sigma \frac{(n-1)}{n}$$

$$\frac{Ud}{\nu} = d_* F(d_*)$$

$$F(d_*) = \sqrt{\frac{100}{d_*^2} + 1} - \sqrt{\frac{100}{d_*^2}}$$



**IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE**  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Datos de los modelos

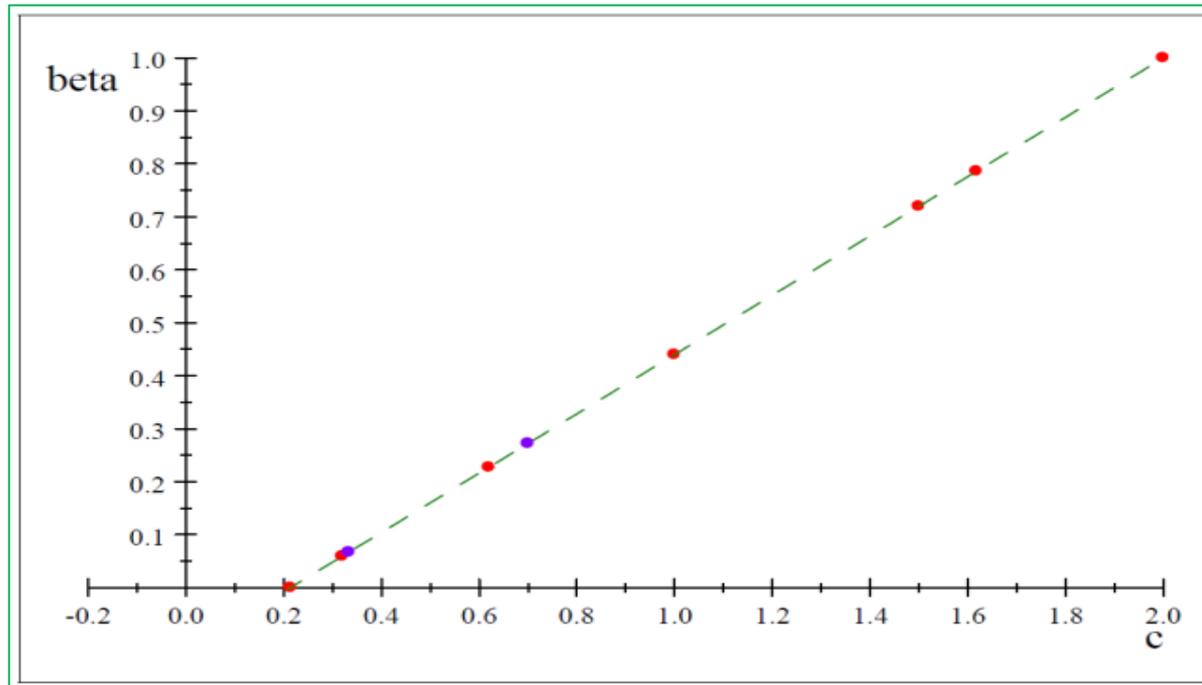
	$b$	$c$	$\beta$	$s$	$m$
<b>Gold number</b>	1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	0.7861	0.38199	1
<b>Allen</b>	1	3/2	0.72002	1/2	1
<b>Newton</b>	2	1	0.44003	1	2
<b>Maza and García</b>	2	7/10	0.27204	1.3	2
<b>Langleben</b>	2	0.62	0.22725	1.3800	2
<b>Magono</b>	1	1/2	0.16005	1.3800	2
<b>Leslie</b>	2	1/3	$6.6727 \times 10^{-2}$	1.6667	3
<b>Litvinov</b>	2	0.32	$5.9256 \times 10^{-2}$	1.68	3



IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



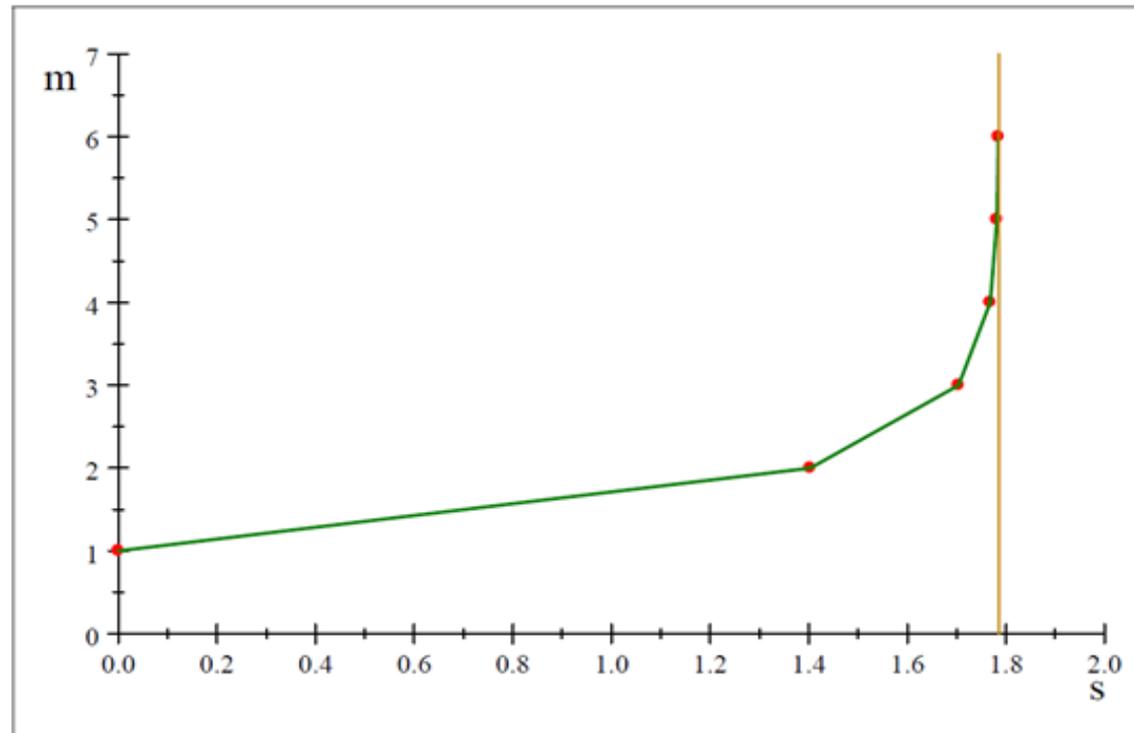
## Exponente vs índice



**Figura 1:  $1/\delta = 0.214$  , índice  $\beta$  como función de la potencia.**



## Ordenes de: derivada vs rama



**Figura 2: Relación entre el orden de rama ( $m$ ) y el orden de la derivada ( $s$ ), ambas variables adimensionales.**

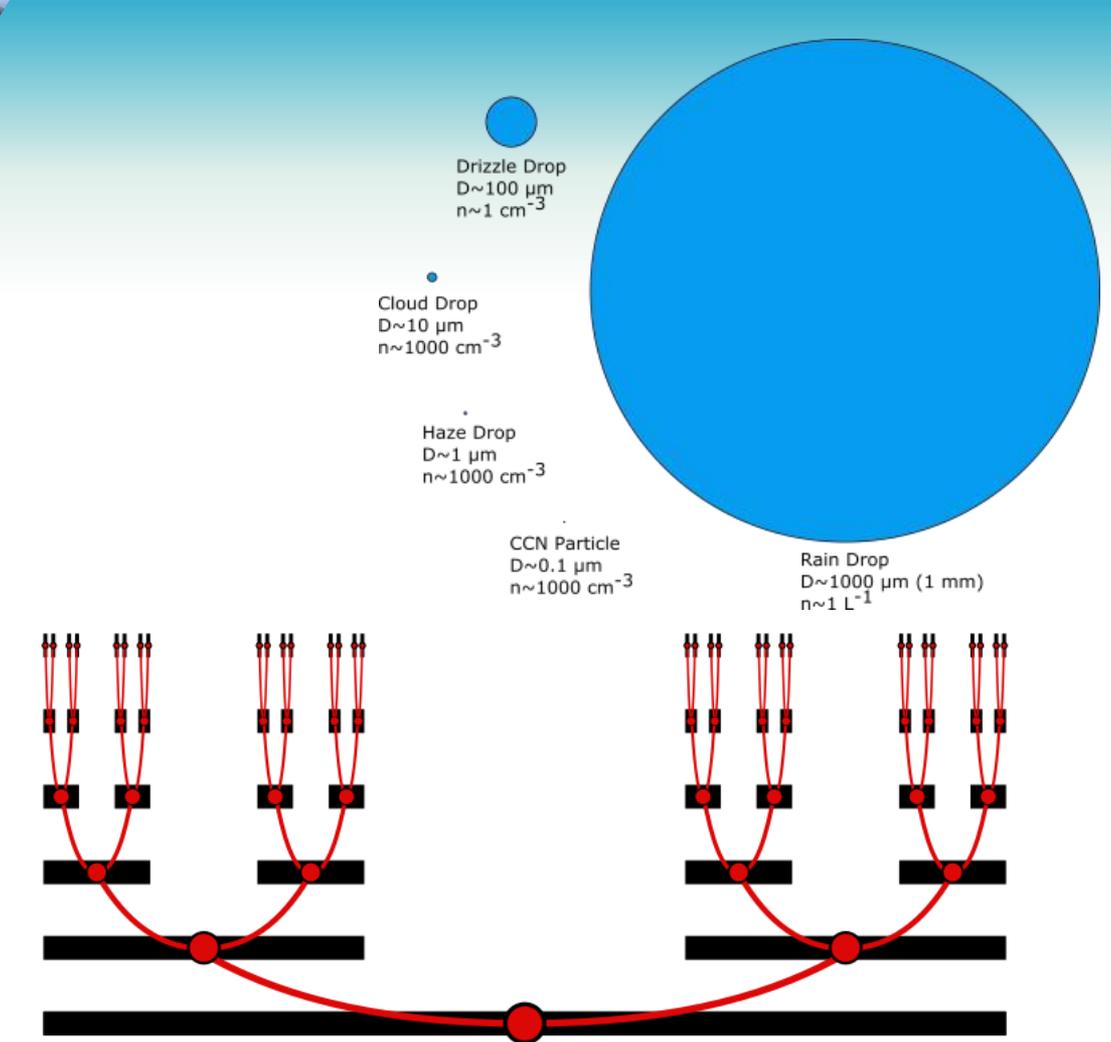
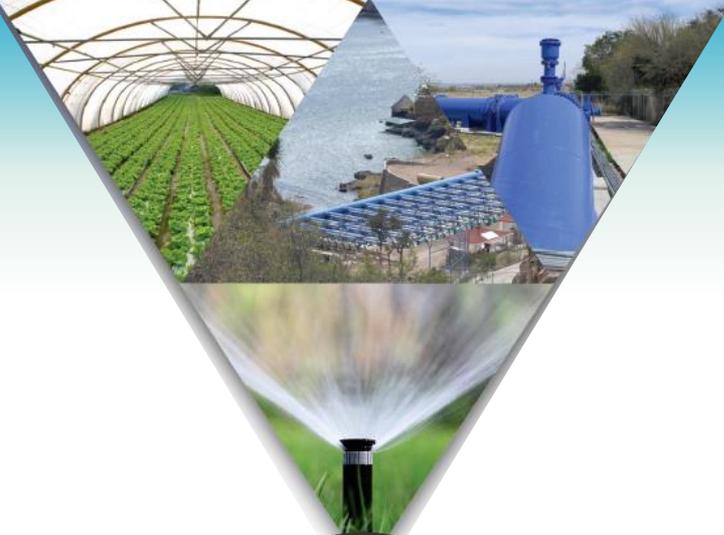


IV CONGRESO NACIONAL  
DE RIEGO Y DRENAJE  
Del 15 al 18 de Octubre del 2018, Aguascalientes, Ags.



## Conclusiones:

- Se propone una relación entre la constante de **Feigenbaum** y el **índice de ocupación espacial**, a través del exponente del diámetro de la partícula. La potencia del tamaño de la partícula decrece desde el valor 2 para la capa viscosa lineal, pasa por el rango inercial, hasta llegar al inverso de la constante de Feigenbaum, en el régimen de turbulencia desarrollada. Mientras el índice de ocupación espacial desciende desde el valor 1 en la capa laminar, pasando por el rango inercial hasta acercarse a 0 en el régimen totalmente desarrollado.
- Reconsideramos la fórmula de **Rubey** para generalizarla, lo cual nos ofrece un camino alternativo para enunciar los diversos modelos de las fórmulas consideradas. Elaboramos un criterio para diferenciar los modelos del clásico de Stokes.
- Casi todas las fórmulas se ubican en el rango inercial del movimiento del fluido por lo que escasamente describirían la capa sub-laminar, que podríamos considerar señaladas por el orden de rama o bifurcación de orden 2 o 3. En particular se destaca la de **Litvinov** que produce el orden de rama más alto.



# Gracias

Sitimta, jrmercadoe@yahoo.com

