



Artículo: COMEII-18051

IV CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2018

Aguascalientes, Ags., del 15 al 18 de octubre de 2018

UNA RELACIÓN ENTRE LA POROSIDAD Y LA DIMENSIÓN FRACTAL

Carlos Fuentes^{1*}; Felipe Zataráin¹; Antonio Quevedo¹; Carlos Chávez²

¹Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, C.P. 62550. México
C.P. 76010, Querétaro, México.

cfuentes@tlaloc.imta.mx. Teléfono 777-3293659 (*Autor de correspondencia)

²Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. C.U. Cerro de las Campanas,
C.P. 76010, Querétaro, México.

Resumen

Se establece una relación entre la porosidad y la dimensión fractal, basada por una parte en la relación superficie-volumen y por otra en la equivalencia masa-superficie de Mandelbrot. Para establecer la relación se hace la distinción entre las porosidades volumétricas y areal, así como entre las solididades volumétricas y areal. Se demuestra que la dimensión fractal se encuentra en el intervalo $E/2 \leq D \leq E$, donde E es la dimensión del espacio físico en el cual el objeto poroso se encuentra embebido ($E = 3$). El límite inferior corresponde a una porosidad nula y el límite superior a una porosidad unitaria. Finalmente se deducen relaciones específicas remarcables entre la dimensión fractal y la porosidad.

Palabras claves: porosidad volumétrica, porosidad areal, solididad volumétrica, solididad areal.



Introducción

La propiedad más significativa de un objeto poroso es precisamente su porosidad. La porosidad volumétrica se define como la razón entre el volumen ocupado por las oquedades, o volumen poroso, y el volumen total, mientras que la porosidad areal es la razón entre el área porosa y el área total del objeto (Fuentes *et al.*, 2001).

Los conceptos de la geometría fractal han sido aplicados en estudios de la distribución de los poros y sólidos en medios porosos como los suelos, en la distribución de las galaxias en el universo y en escalas muy finas como es el nivel molecular (e.g. Pietronero, 1987; Rieu y Sposito, 1991; Fuentes, 1992; Turcotte, 1997; Fuentes *et al.*, 1998; Labini *et al.*, 2009).

El objetivo de este trabajo es el establecimiento de un relación entre la porosidad y la dimensión fractal de un medio poroso asimilado a un objeto fractal.

Teoría

Definiciones

El tamaño de un subconjunto cubierta. Se define el tamaño $|U|=r$ de un subconjunto U no vacío de \mathfrak{R}^E , donde E es la dimensión de Euclides (aquí $E = 3$) y \mathfrak{R} el conjunto de los números reales, como el límite de las distancias más grandes entre todo par de puntos x e y en U : $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$. Si $\{U_j\}_r$ es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a r , que cubre un conjunto F , i.e. F es un subconjunto de la unión de los conjuntos U_j , con $0 < |U_j| = r_j \leq r$, se dice que $\{U_j\}_r$ es una r -cubierta de F .

La medida de Lebesgue. Para un subconjunto F de \mathfrak{R}^E se define para cada $r > 0$ la medida siguiente:

$$L_r^E(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^E : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r\text{-cubierta de } F \right\} \quad (1)$$

La medida E -dimensional de Lebesgue del conjunto F , denotada por $L^E(F)$, se define como el límite de la ecuación (1) cuando r tiende a cero:

$$L^E(F) = \lim_{r \rightarrow 0} L_r^E(F) \quad (2)$$



Existen subconjuntos del conjunto de los números reales, cuya cantidad de elementos es igual al propio conjunto de los números reales y que su medida de Lebesgue es cero. El ejemplo clásico es el conjunto perfecto de Cantor, un subconjunto del intervalo $[0,1]$. Este conjunto tiene entre sus propiedades la de no contener ningún intervalo, esto es, el conjunto de Cantor está formado sólo por puntos y cada uno de ellos es de acumulación.

Se hace notar que la medida de Lebesgue no hace diferencia entre un punto aislado y el conjunto de Cantor; los dos conjuntos tienen medida de Lebesgue cero y es deseable poder hacer una diferencia entre estos dos conjuntos. También existen conjuntos que sin contener ningún intervalo tienen medida de Lebesgue positiva, como los llamados conjuntos “gordos” de Cantor que están formados sólo por puntos de acumulación.

Por lo tanto es conveniente definir una medida más fina que la de Lebesgue y que haga diferencia entre puntos aislados y el polvo de Cantor. Una medida capaz de diferenciar *fractales*.

La medida de Hausdorff. Para un subconjunto F de \mathfrak{R}^E se puede definir para cada $r > 0$ la siguiente medida (Falconer, 1990):

$$H_r^S(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^S : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r\text{-cubierta de } F \right\} \quad (3)$$

donde S es un número no negativo, no necesariamente entero.

Cuando se está interesado en minimizar, para cada cubierta de F de tamaños inferiores o iguales a r , la suma de los tamaños de los conjuntos cubiertas a la potencia S , la clase de cubiertas admisibles de F se reduce a medida que r disminuye (Falconer, 1990); esto implica que el *infimum* de la suma disminuye y tiende a un límite cuando r tiende a cero. Es decir:

$$H^S(F) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^S(F) \quad (4)$$

donde $H^S(F)$ es la medida S -dimensional de Hausdorff del conjunto F .

La dimensión de Hausdorff-Besicovich. Un gráfico de $H^S(F)$ en función de S ($0 \leq S \leq E$) muestra que existe un valor crítico de S donde la medida de Hausdorff salta de ∞ a 0 (Falconer, 1990). Este valor crítico es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto F .



La *dimensión fractal de Mandelbrot*. Si F es cubierto por una colección finita de conjuntos ($j=1,2,\dots,N_r$) de la misma forma y tamaño (r) de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$H^D = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r r^D] \quad (5)$$

Usando esta relación y la continuidad de la función logaritmo, Mandelbrot (1983) define una nueva dimensión como sigue:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\log(N_r)}{\log(H/r)} \right] \quad (6)$$

Se puede demostrar que la dimensión de Hausdorff-Besicovich es menor o igual a la dimensión de Mandelbrot. Esta última es fácil de calcular y usualmente aproxima rápidamente a la primera, de difícil cálculo.

La ecuación (5) indica que si el suelo se considera como un objeto fractal, el número de conjuntos cubiertas de tamaño r es inversamente proporcional a r^D cuando $r \rightarrow 0$, es decir:

$$N_r = \left(\frac{H}{r} \right)^D \quad (7)$$

Se pueden construir conjuntos en los cuales el número de conjuntos cubiertas de radio r satisfaga de manera exacta la fórmula (7) para todo r , por ejemplo: i) el polvo de Cantor donde $E = 1$, $L = 0$, $H = 1$, $D = \log(2)/\log(3) \cong 0.6309$; ii) el tapiz de Sierpinski donde $E = 2$, $L = 0$, $H = 1$, $D = \log(8)/\log(3) \cong 1.8928$; iii) la esponja de Menger donde $E = 3$, $L = 0$, $H = 1$, $D = \log(20)/\log(3) \cong 2.7268$. En estos conjuntos: $N_r = (1/r)^D$ con $D = \log(N_r)/\log(1/r)$.

Volumen del cuerpo paralelo. Se define el cuerpo r -paralelo P_r de un conjunto F por $P_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E : |x - y| \leq r, y \in F\}$. El volumen del cuerpo paralelo se obtiene como el producto del volumen del conjunto cubierta, es decir cr^E donde c es un coeficiente de forma ($c = 1$ si las cubiertas son paralelepípedos), y del número de cubiertas, esto es, $\text{vol}_E(P_r) = N_r cr^E$. Considerando la ecuación (7), se obtiene cuando $r \rightarrow 0$:

$$\text{vol}_E(P_r) = cH^E \left(\frac{r}{H} \right)^{E-D} \quad (8)$$



La fórmula (8) puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir del volumen del cuerpo paralelo. Es decir:

$$D = E - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log[\text{vol}_E(P_r)/cH^E]}{\log(r/H)} \quad (9)$$

Notemos que el volumen del cuerpo paralelo del fractal no es igual al volumen de la cáscara, esta última definida por $C_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E - F : |x - y| \leq r, y \in F\}$.

La masa contenida en los conjuntos cubiertas. La masa en la geometría de Euclides es proporcional al volumen de los conjuntos cubiertas $m_r \propto r^E$. En la geometría fractal E se reemplaza por la dimensión fractal (Mandelbrot, 1983) $m_r \propto r^D$. De esta relación se puede inferir que la medida de Hausdorff, definida por las ecuaciones las ecuaciones (3) y (4) con $S = D$ es, de hecho, una medida de masa. Esta proporción se transforma en una igualdad con el auxilio de la escala H definida por la ecuación (5): $m_r = m_H (r/H)^D$, donde m_H es la masa correspondiente a $r = H$. Puesto que en las ecuaciones las ecuaciones (5) y (8) se han considerado conjuntos cubiertas de la misma forma, se tiene $m_H = \rho_H cH^E$ donde la densidad ρ_H corresponde a $r = H$. En otros términos, se puede establecer que cuando $r \rightarrow 0$:

$$m_r = \rho_H cH^E \left(\frac{r}{H}\right)^D \quad (10)$$

Si la masa se expresa como $m_r = \rho_r c r^E$, la densidad (ρ_r), considerando la ecuación (10) queda definida por ($r \rightarrow 0$):

$$\rho_r = \rho_H \left(\frac{H}{r}\right)^{E-D} \quad (11)$$

De acuerdo con las ecuaciones (7), (8), (10) y (11), se satisfacen los límites siguientes:

$$\rho_H cH^E = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r m_r]; \quad \rho_H cH^E = \lim_{r \rightarrow 0} [\rho_r \text{vol}_E(P_r)] \quad (12)$$

Se puede definir una densidad ($\langle \rho_r \rangle$) de modo que la masa contenida en los conjuntos cubiertas sea obtenida a partir del volumen del cuerpo paralelo. Cuando $r \rightarrow 0$:

$$m_r = \langle \rho_r \rangle \text{vol}_E(P_r) \quad (13)$$



donde:

$$\langle \rho_r \rangle = \rho_H \left(\frac{r}{H} \right)^{2D-E} \quad (14)$$

La relación superficie-volumen de Mandelbrot. Puesto que el volumen (V) es proporcional a L^3 y el área (A) a L^2 , donde L representa una longitud, $V^{1/3}$ es proporcional a $A^{1/2}$ en la geometría de Euclides. De acuerdo con Mandelbrot, en la geometría fractal $V^{1/3}$ es proporcional a $A^{1/D}$, donde D es la dimensión fractal (Mandelbrot, 1983). Esta proporción puede ser generalizada de la manera siguiente (Feder, 1988):

$$\text{sup}_E(F) \propto [\text{vol}_E(F)]^{D/E} \quad (15)$$

La equivalencia superficie-masa. El volumen de cada conjunto cubierta es proporcionado por cr^E . De la ecuación (15) se obtiene la proporción: $\text{sup}_E = (U) \propto r^D$. Considerando la ecuación (10) se establece la equivalencia siguiente:

$$m_E(F) \propto \text{sup}_E(F) \quad (16)$$

Cuando se reemplaza la masa por la superficie en las ecuaciones (10) a (14) la densidad ρ_H , en lugar de representar el contenido de masa en una unidad de volumen, representa el contenido de superficie en una unidad de volumen correspondiente a $r = H$.

Relación entre la dimensión fractal y la porosidad

Considerando al suelo como un objeto fractal, se puede aplicar la ecuación (15) de la manera siguiente: $\phi_s = 1 - \phi$ representa el volumen de los sólidos relativo al volumen total de suelo o "solidicidad volumétrica", entonces el área de los sólidos relativa al área total del suelo o "solidicidad areal", μ_s , será igual a ϕ_s^s , con $s = D/E$. Supongamos que las partículas de un fluido se mueven a través del espacio poroso del objeto en trayectorias no necesariamente rectas sino en trayectorias tortuosas (Dullien, 1979) y hagamos un corte transversal a la dirección principal del movimiento (Childs y Collis-George, 1950), Figura 1. Enseguida ubiquemos las dos secciones paralelas obtenidas en dos puntos separados de una distancia del orden del tamaño de los poros. Sobre cada sección, el área de los poros es, según la ecuación (15), igual a ϕ^s . La probabilidad total del encuentro de las secciones (μ) en un punto intermedio es el área de flujo (Fuentes *et al.*, 2001): $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$.

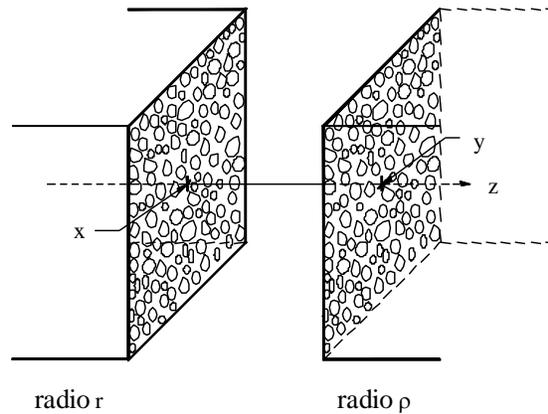


Figura 1. Un corte en el suelo perpendicular a la dirección macroscópica de flujo. Los radios de los poros son caracterizados en cada cara por r y ρ .

Puesto que $\phi_s + \phi = 1$ y $\mu_s + \mu = 1$ se establece la relación fundamental siguiente:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad \text{con} \quad s = D/E \quad (17)$$

en otros términos se tiene:

$$\text{Solidicidad areal: } \mu_s = 1 - \mu = (1 - \phi)^s = \phi_s^s \quad (18)$$

$$\text{Porosidad areal: } \mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s} \quad (19)$$

La relación que define a la dimensión en función de la porosidad areal es la siguiente:

$$(1 - \mu)^{1/s} + \mu^{1/2s} = 1 \quad \text{con} \quad s = D/E \quad (20)$$

Las densidades

Teniendo en cuenta la estructura de la ecuación (18) la superficie de los sólidos contenida en las cubiertas, considerando la ecuación (16), es proporcionada por:

$$m_s(r) = \rho_s c H_s^E \left(\frac{r}{H_s} \right)^D \quad (21)$$



cuando $r \rightarrow 0$, donde $cH_s^E = V_s$, es el volumen total de los sólidos y ρ_s es la densidad total de los sólidos. La densidad de los sólidos correspondiente a r se obtiene de la ecuación (11) ($r \rightarrow 0$):

$$\rho_s(r) = \rho_s \left(\frac{H_s}{r} \right)^{E-D} \quad (22)$$

Las ecuaciones (7) y (8) correspondientes a los sólidos se escriben, cuando $r \rightarrow 0$, como sigue:

$$N_s(r) = \left(\frac{H_s}{r} \right)^D \quad (23)$$

$$\text{vol}_E(P_r) = cH_s^E \left(\frac{r}{H_s} \right)^{E-D} \quad (24)$$

De manera análoga y de acuerdo con la estructura de la ecuación (19), la superficie de los poros contenida en las cubiertas, considerando la ecuación (16), es proporcionada por:

$$m_v(r) = \rho_v cH_v^E \left(\frac{r}{H_v} \right)^{2D} \quad (25)$$

cuando $r \rightarrow 0$, donde $cH_v^E = V_v$, es el volumen total de los poros y ρ_v es la densidad total de los poros. La densidad de los poros correspondiente a r , cuando $r \rightarrow 0$, se obtiene de la ecuación (14):

$$\rho_v(r) = \rho_v \left(\frac{r}{H_v} \right)^{2D-E} \quad (26)$$

Puesto que el volumen total de suelo ($V_t = cH_t^E$) es igual a la suma de los volúmenes totales de los sólidos ($V_s = cH_s^E$) y de los poros ($V_v = cH_v^E$), se establece que:

$$H_s^E + H_v^E = H_t^E, \quad \phi_s = \frac{H_s^E}{H_t^E}, \quad \phi = \frac{H_v^E}{H_t^E} \quad (27)$$

La suma de la superficie total de los sólidos (M_s) y la superficie total de los poros (M_v) es igual a la superficie total del suelo (M_t).



Densidades distribuidas. Se entiende como densidad distribuida el grandor obtenido cuando la masa de una sustancia se divide entre el volumen que ella ocupa en el espacio.

Dada la equivalencia entre la superficie y la masa establecida en la ecuación (16) se tiene $M_s = \rho_s c H_s^E$, $M_v = \rho_v c H_v^E$ y $M_t = \rho_t c H_t^E$ donde ρ_s es la densidad distribuida de los sólidos, ρ_v es la densidad distribuida de los poros y ρ_t es la densidad total del objeto. La ecuación (27) permite establecer:

$$\rho_s (1 - \phi) + \rho_v \phi = \rho_t \quad (28)$$

La comparación de las ecuaciones (17) y (28) conduce a las definiciones siguientes de las densidades distribuidas:

$$\rho_s = \rho_t \phi_s^{s-1} \quad (29)$$

$$\rho_v = \rho_t \phi^{2s-1} \quad (30)$$

Se puede ver que a ecuación (29) es análoga a la ecuación (22) y que la ecuación (30) es análoga a la ecuación (26).

Densidades concentradas. Se entiende como densidad concentrada el grandor obtenido cuando la masa total del objeto se divide entre el volumen del espacio que ocupa una de sus componentes.

La densidad concentrada sólida (ρ_o) y la densidad concentrada de los poros (ρ_p) se deducen de la ecuación (28) haciendo primero $\rho_v = 0$ y $\rho_o = \rho_s$, y luego $\rho_s = 0$ y $\rho_p = \rho_v$. A saber:

$$\rho_o = \rho_t / \phi_s = \rho_t / (1 - \phi) \quad (31)$$

$$\rho_p = \rho_t / \phi \quad (32)$$

se debe notar que $1/\rho_t = 1/\rho_o + 1/\rho_p$. La ecuación (31) es utilizada frecuentemente para estimar la porosidad en función de ρ_t y ρ_o : $\phi = 1 - \rho_t / \rho_o$.

A partir de la ecuación (17) se puede demostrar que se satisface la desigualdad $\mu \leq \phi$. De la misma ecuación se deducen los comportamientos extremos de la función $s(\phi)$:



$$\text{Para } \phi \rightarrow 0: s(\phi) = 1/2 + \ln 2 / \{2[1 + \ln(1/\phi)]\} \quad (33)$$

$$\text{Para } \phi \rightarrow 1: s(\phi) = 1 - \ln 2 / \{\ln[1/(1-\phi)]\} \quad (34)$$

de donde:

$$\frac{1}{2} < s < 1 \quad (35)$$

Las ecuaciones (17) y (35) establecen que la dimensión fractal ($E = 3$) satisface $3/2 < D < 3$.

Resultados

La gráfica de la función implícita $s(\phi)$, definida por la ecuación (17) se muestra en la Figura 2.

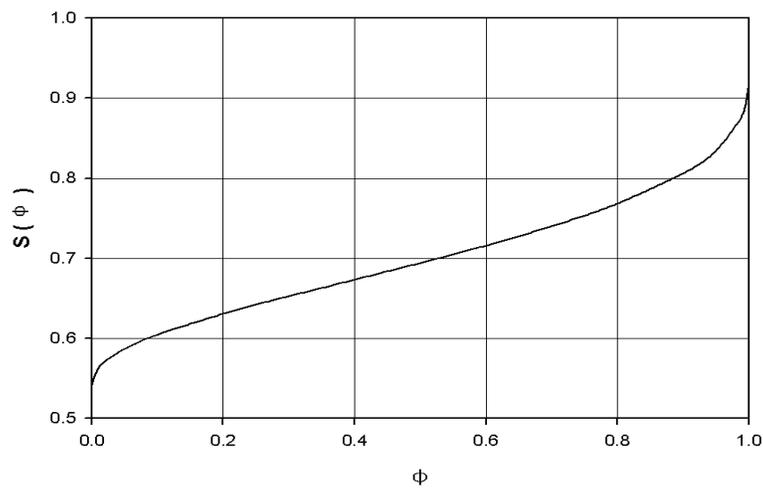


Figura 2. Gráfica de la función $s(\phi)$ con $s = D/E$, donde D es la dimensión fractal, E la dimensión de Euclides y ϕ la porosidad volumétrica: $0 \leq \phi \leq 1$, $E/2 \leq D \leq E$.

Algunos valores importantes de la dimensión fractal y de la porosidad se obtienen en los siguientes casos:

1. En su estudio sobre la permeabilidad de los suelos Millington y Quirk (1961) utilizan el valor de $s = 2/3$. En el contexto de los conceptos de la geometría fractal expuestos correspondería a $D = 2$ y $E = 3$. Se puede demostrar a partir de la ecuación (17) que la porosidad volumétrica (ϕ) satisface el polinomio de grado doce:



$$\phi^{12} + 3\phi^{10} - 6\phi^9 + 3\phi^8 - 12\phi^7 + 40\phi^6 - 60\phi^5 + 39\phi^4 - 8\phi^3 = 0 \quad (36)$$

o equivalentemente

$$\phi^3 (1-\phi)^2 (\phi^7 + 2\phi^6 + 6\phi^5 + 4\phi^4 + 5\phi^3 - 6\phi^2 + 23\phi - 8) = 0 \quad (37)$$

en donde $\phi=0$ es una raíz triple, $\phi=1$ es una raíz doble. Las siete raíces restantes son ($i = \sqrt{-1}$):

$$\phi = -1.4666934 \pm 1.2411424i, -0.4132213 \pm 2.1388572i, 0.6963764 \pm 0.8712687i$$

$$\phi = 0.3670764 \quad (38)$$

La única raíz real en el intervalo $(0,1)$ es $\phi \cong 0.3671$, o sea $\phi_s = 1 - \phi = 0.6329$, lo que conduce a $\mu \cong 0.2628$, o sea $\mu_s = 1 - \mu = 0.7372$. Se puede demostrar a partir de la ecuación (20) que μ satisface el polinomio de grado doce siguiente:

$$\mu^{12} - 12\mu^{11} + 66\mu^{10} - 218\mu^9 + 471\mu^8 - 678\mu^7 + 647\mu^6 - 390\mu^5 + 129\mu^4 - 16\mu^3 = 0 \quad (39)$$

o equivalentemente

$$\mu^3 (1-\mu)^2 (\mu^7 - 10\mu^6 + 45\mu^5 - 118\mu^4 + 190\mu^3 - 180\mu^2 + 97\mu - 16) = 0 \quad (40)$$

en donde $\phi=0$ es una raíz triple, $\phi=1$ es una raíz doble. Las siete raíces restantes son ($i = \sqrt{-1}$):

$$\mu = 0.7198761 \pm 0.9054059i, 1.4157221 \pm 1.9238454i, 2.73298676 \pm 0.7108486i$$

$$\mu = 0.2628302 \quad (41)$$

La única raíz real en el intervalo $(0,1)$ es $\mu \cong 0.2628$, o sea $\mu_s = 1 - \mu = 0.7372$. Este resultado puede reforzar los trabajos realizados por Pietronero (1987) y Labini *et al.* (2009) en cuanto a la estructura fractal del universo, al menos en ciertas escalas; los autores concluyen que la dimensión fractal es de aproximadamente $D=2$. Considerando que la materia visible y la oscura conforman la materia del universo y ésta se encuentra en los poros del mismo, y la energía oscura en el espacio los valores correspondientes de μ y μ_s proporcionados por la ecuación (41) son semejantes a los valores experimentales: $\mu = \Omega_m \cong 0.266_{-0.040}^{+0.025}$ y $\mu_s = \Omega_\Lambda \cong 0.732_{-0.025}^{+0.040}$.

2. Si la porosidad volumétrica es igual a la solidicidad volumétrica, es decir $\phi = \phi_s = 1/2$, entonces de la ecuación (17):



$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} = \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1 \quad (42)$$

haciendo $x = (1/2)^s$ se obtiene la ecuación que define la proporción áurea (Hunteny, 1970): $x^2 + x - 1 = 0$. La raíz positiva proporciona:

$$\text{La solidicidad areal: } \mu_s = (\sqrt{5} - 1)/2 \cong 0.6180.$$

$$\text{La dimensión fractal: } s = \log_2 \left[(1 + \sqrt{5})/2 \right] \cong 0.6942 \quad (E = 3 \Rightarrow D \cong 2.0827)$$

$$\text{La porosidad areal: } \mu = \left[(\sqrt{5} - 1)/2 \right]^2 \cong 0.3820$$

3. Si la porosidad areal es igual a la solidicidad areal, es decir $\mu = \mu_s = 1/2$, entonces la ecuación (17):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/s} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2s} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2s} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2s} = 1 \quad (43)$$

haciendo $x = (1/2)^{1/2s}$, se obtiene de nuevo la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, que define la proporción áurea. La raíz positiva proporciona:

$$\text{La porosidad volumétrica: } \phi = \left[(\sqrt{5} - 1)/2 \right] \cong 0.6180$$

$$\text{La dimensión fractal: } s = 1 / \left\{ 2 \log_2 \left[(1 + \sqrt{5})/2 \right] \right\} \cong 0.7202 \quad (E = 3 \Rightarrow D \cong 2.1606)$$

$$\text{La solidicidad volumétrica: } \phi_s = \left[(3 - \sqrt{5})/2 \right] \cong 0.3820.$$

Este caso puede describir la sustancia agua vista como un medio poroso con $\rho_t = 1 \text{ g/cm}^3$. Las densidades distribuidas y concentradas respectivamente toman los valores siguientes: $\rho_s/\rho_t = \sqrt{5} - 1 \cong 1.2361$ y $\rho_v/\rho_t = 3 - \sqrt{5} \cong 0.7639$; $\rho_o/\rho_t = (3 + \sqrt{5})/2 \cong 2.6180$ y $\rho_p/\rho_t = (1 + \sqrt{5})/2 \cong 1.6180$.

Ahora bien, el número másico de la molécula del agua es $Z = 18.01528$, mientras que la unidad de masa atómica es $u = 1.660531 \times 10^{-24} \text{ g}$ y en consecuencia la masa de la molécula es $M_t = Zu = 2.9914943 \times 10^{-23} \text{ g}$. Si se supone que la masa esta concentrada en el volumen de la molécula se tendrá $V_s = \frac{\pi}{6} H_s^3 = M_t/\rho_o$.



Tomando la densidad concentrada sólida de este ejemplo se encuentra que $H_s = 2.7945 \times 10^{-8} \text{ cm} \cong 2.79 A^\circ$; para el hielo se ha observado que $H_s \cong 2.76 A^\circ$ y para el agua entre $0^\circ\text{C} < T < 5^\circ\text{C}$, $H_s \cong 2.9 A^\circ$, valores muy cercanos al predicho en este ejemplo.

Conclusiones

Bajo la consideración de que un objeto poroso puede ser asimilado a un objeto fractal se ha establecido una relación entre su porosidad y su dimensión fractal de masa. La porosidad volumétrica caracteriza la parte del volumen del objeto donde puede fluir un fluido y la dimensión fractal caracteriza la manera en que este fluido llena el espacio en diferentes escalas. La relación se ha establecido mediante la utilización de una relación entre la superficie fractal, a través de la cual puede fluir un fluido, y el volumen contenido en el interior del objeto. La dimensión fractal se encuentra en el intervalo $E/2 \leq D \leq E$, donde E es la dimensión del espacio físico en el cual el objeto poroso se encuentra embebido ($E = 3$). El límite inferior corresponde a una porosidad nula y el límite superior a una porosidad unitaria. Finalmente se han deducido relaciones específicas remarcables entre la dimensión fractal y la porosidad.

Referencias Bibliográficas

- Childs, E.C., N. Collis-George. (1950). The permeability of porous materials. Proc. Roy. Soc., Ser., A(201): 392-405.
- Dullien, F.A.L. (1979). Porous media, fluid transport and pore structure. Academic Press, Nueva York.
- Falconer, K. (1990). Fractal geometry, mathematical foundations and applications. John Wiley Sons, Londres, 288 p.
- Feder, J. (1988). Fractals. Plenum Press, New York
- Fuentes, C. 1992. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés, tesis de doctorado, Université Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 267 p.
- Fuentes, C., M. Vauclin, J.-Y. Parlange, R. Haverkamp. (1998). Soil-water conductivity of a fractal soil. Fractals in Soil Science, editado por Ph. Baveye, J.Y. Parlange y B.A. Stewart, CRC Press, Boca Raton, pp. 333-340.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, R. Haverkamp, (2001). Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. Ingeniería Hidráulica en México, 16(2): 119-137.



- Labini, F.S., N.L. Vasilyev, L. Pietronero, Y. Baryshev. (2009). Absence of self-averaging and of homogeneity in the large scale galaxy distribution. *Europhys. Lett.* 86. doi:10.1209/0295-5075/86/49001.
- Mandelbrot, B.B. (1983). *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco California.
- Millington, R.J., and Quirk, J.P. (1961). 1 Permeability of porous solids. *Trans. Faraday Soc.*, 57: 1200-1206.
- Pietronero, L., (1987). *The Fractal Structure of the Universe: Correlations of Galaxies and Clusters*. *Physica A* (144): 257.
- Rieu, M., Sposito, G. (1991). Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 55: 1231-1238.
- Turcotte, D.L. (1997). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge.