



Artículo: COMEII-18049

IV CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2018

Aguascalientes, Ags., del 15 al 18 de octubre de 2018

MODELO HIDROLÓGICO CON TIRANTE VARIABLE EN EL RIEGO POR GRAVEDAD

Felipe Zataráin^{1*}; Carlos Fuentes¹; Antonio Quevedo¹

¹Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, C.P. 62550. México.

fzatarain@tlaloc.imta.mx (*Autor de correspondencia)

Resumen

Para la modelación del riego por gravedad el movimiento del agua se separa en superficial y subterráneo. Ambos movimientos pueden abordarse de manera empírica o con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant en la superficie y la ecuación de Richards en el movimiento subsuperficial o bien alguna simplificación y combinación de ambos grupos de enfoques. Un modelo hidrológico consiste en utilizar la versión integral de la ecuación de continuidad que se resuelve con algunas hipótesis, como el modelo de Lewis y Milne (1938) que asume tirante constante y la infiltración como una función sólo del tiempo de contacto. El tirante puede ser estimado a partir del perfil de la onda en régimen permanente. Aquí se presenta una solución al problema tirante-infiltración aproximando la evolución en el tiempo del tirante y enseguida encontrando la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada.

Palabras claves: hidráulica, modelación.



Introducción

El riego por gravedad consiste en el aporte de agua en la cabecera de un cauce inclinado construido en la parcela, como una melga o un surco, con la finalidad de aprovechar el campo gravitacional para proporcionar el agua para el desarrollo de las plantas cultivadas.

De acuerdo con los principios utilizados en la modelación, en la que el movimiento del agua se separa en superficial y subterráneo, los trabajos reportados en la literatura pueden agruparse en cuatro enfoques (Fuentes *et al.*, 2004):

- 1) La modelación de los movimientos superficial y subterráneo se aborda de una manera totalmente empírica.
- 2) El movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones, y el movimiento subterráneo con ecuaciones empíricas.
- 3) El movimiento superficial se modela con las ecuaciones simplificadas de Barré de Saint-Venant (onda cinemática, onda difusiva o inercia nula y modelo hidrológico) y en la modelación del movimiento subterráneo existe la posibilidad de utilizar ecuaciones racionales (e.g. Lewis y Milne, 1938; Rendón *et al.*, 1998).
- 4) El movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y el movimiento subterráneo con la ecuación de Richards (1931).

Un modelo hidrológico consiste en utilizar la versión integral de la ecuación de continuidad que se resuelve con algunas hipótesis, como el modelo de Lewis y Milne (1938) que asume tirante constante y la infiltración como una función sólo del tiempo de contacto. El tirante puede ser estimado a partir del perfil de la onda en régimen permanente. Aquí se presenta una solución al problema tirante-infiltración aproximando la evolución en el tiempo del tirante y enseguida encontrando la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada.

Materiales y Métodos

Las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, considerando que la densidad del agua es prácticamente constante, están formadas por la ecuación de continuidad y por la ecuación de cantidad de movimiento o impulsión. Tomando en cuenta que el caudal volumétrico es $Q = AU$, donde A es el área hidráulica y U la velocidad, las ecuaciones se escriben como sigue:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = W \quad (1)$$



$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(J - J_o) = \lambda \frac{WQ}{A} \quad (2)$$

donde t es el tiempo, x la coordenada espacial, W es el volumen de fuente o sumidero, g la aceleración gravitacional, α es el ángulo que forma la rasante del canal con respecto al plano horizontal y $J_o = \sin(\alpha)$. Cuando el ángulo es pequeño $\sin(\alpha)$ se reemplaza por $\tan(\alpha)$, la pendiente de la rasante del canal: $J_o \approx \tan(\alpha)$, el gradiente o pendiente de fricción está definido como $J = -\partial h_f / \partial x$, con h_f la pérdida de energía por unidad de peso debido a la fricción y h es el tirante. De estas ecuaciones se deduce la modalidad que consiste en tener el área hidráulica (o el tirante) y la velocidad como variables dependientes. Considerando $Q = AU$ y utilizando la ecuación (1) en la ecuación (2) durante el desarrollo, las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} = W \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(J - J_o) + (1 - \lambda) \frac{UW}{A} = 0 \quad (4)$$

en las cuales se debe notar que aparece el operador derivada total, también llamado derivada material, definido por $d/dt = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$, aplicado al área en la primera y a la velocidad en la segunda.

En las ecuaciones de Barré de Saint-Venant se deben proporcionar la función que relaciona el área de la sección transversal del cauce con el tirante de agua, así como la pendiente de la rasante del cauce. Para condiciones iniciales y de frontera dadas las ecuaciones se resuelven para encontrar, en principio, la evolución del área hidráulica y el caudal. Sin embargo, esto no es posible a menos que se proporcionen la variación de la pendiente de fricción con respecto a la geometría del cauce y el caudal, conocida como ley de resistencia al flujo o ley de resistencia hidráulica, así como la fuente o sumidero; estos dos aspectos constituyen el problema de cerradura de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant.

En el riego por gravedad se debe proporcionar el sumidero representado por el volumen infiltrado por unidad de longitud de cauce en la unidad de tiempo (\dot{A}_1), a saber:

$$\dot{A}_1 = \frac{\partial A_1}{\partial t}, \quad A_1(x,t) = \int_{P_m} q_l(x,y,z,t) dP_m \quad (5)$$



donde $q_i(x,y,z,t)$ es el caudal de infiltración por unidad de superficie de canal o caudal unitario y P_m es el perímetro mojado. Para calcular este caudal unitario es necesario resolver la ecuación diferencial de Richards (1931).

La ley de resistencia generalmente utilizada en hidráulica de canales abiertos es una ley en potencia cuya estructura es la siguiente:

$$U = cR_h^b J^d \quad (6)$$

donde $R_h = A/P_m$ es el radio hidráulico definido como la razón entre el área hidráulica y el perímetro mojado; c , b y d son parámetros de la ley en potencia.

La ecuación (6) incluye las formulaciones clásicas de Chézy con $b = d = 1/2$ y $c = C_h$, donde C_h es un coeficiente empírico dimensional; de Manning-Strickler con $b = 2/3$, $d = 1/2$, y $c = 1/n$ donde n es un coeficiente de rugosidad dimensional; de Poiseuille con $b = 2$, $d = 1$ y $c = kg/\nu$, donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática y k es un factor adimensional, cuyo valor en el flujo sobre superficies lisas es $k = 1/3$ (e.g. Landau y Lifchitz, 1989).

Un modelo hidrológico consiste en utilizar la versión integral de la ecuación de continuidad definida por la ecuación (1); en el riego por gravedad se toma $W = -\dot{A}_1$, donde $\dot{A}_1 = \partial A_1 / \partial t$ está definida por la ecuación (5). Una primera integración en el espacio de la ecuación de continuidad conduce a:

$$Q(x,t) = Q(0,t) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} [A(\tilde{x},t) + A_1(\tilde{x},t)] d\tilde{x} \quad (7)$$

El caudal en la cabecera del cauce es $Q(0,t) = Q_o(t)$, en la posición del frente de avance $x = x_f$ el caudal, los volúmenes infiltrados y en la superficie por unidad de longitud son nulos para todo tiempo: $Q(x_f,t) = 0$, $A_1(x_f,t) = 0$ y $A(x_f,t) = 0$.

De la ecuación (7) se deduce para la fase de avance lo siguiente:

$$Q_o(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x_f} [A(x,t) + A_1(x,t)] dx \quad (8)$$

La integración en el tiempo considerando que los volúmenes unitarios infiltrados y en la superficie son nulos a lo largo del cauce en el tiempo inicial, $A_1(0,t) = 0$ y $A(0,t) = 0$, conduce a:



$$\int_0^t Q_o(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_0^{x_f} [A(x,t) + A_l(x,t)] dx \quad (9)$$

En el caso particular pero importante de un caudal constante se tiene:

$$Q_o t = \int_0^{x_f} A_\psi(x,t) dx, \quad A_\psi(x,t) = A(x,t) + A_l(x,t) \quad (10)$$

en la cual se ha introducido el volumen unitario almacenado total $A_\psi(x,t)$.

La ecuación (10) constituye el modelo hidrológico que se resuelve con algunas hipótesis, como el modelo de Lewis y Milne (1938) que asume tirante constante y la infiltración como una función sólo del tiempo de contacto.

Resultados y Discusión

Siguiendo el procedimiento de Fuentes *et al.* (2004), el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por gravedad en melgas se estudia cuando el caudal de riego, impuesto como condición de frontera en la cabecera de la melga, se representa por funciones que satisfagan el límite siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [q(0,t) t^{-\gamma}] = C_q \quad (11)$$

en donde $C_q \geq 0$ y $\gamma \geq 0$ son parámetros dados. Un caudal constante es representado por $\gamma = 0$. La variación temporal del tirante de agua en la cabecera se representa por funciones que satisfacen el límite siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [h(0,t) t^{-\alpha}] = \sigma \quad (12)$$

en el cual los parámetros σ y α deben ser determinados. Es claro que $\alpha \geq 0$, puesto que inicialmente no hay agua sobre la superficie de la melga.

Para la pendiente del perfil de agua sobre la superficie del suelo en la entrada de la melga se asume la dependencia siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\partial h(0,t)}{\partial x} t^\delta \right] = -C_p \quad (13)$$

en donde $C_p \geq 0$ y $\delta \geq 0$, ya que en la fase de avance $\partial h / \partial x \leq 0$.



Considerando el origen de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y asumiendo una forma particular del comportamiento de la fuerza unitaria de fricción en la cabecera de la melga, Fuentes *et al.* (2012) establecen el límite siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f_f(0, t) t^\eta] = C_f \quad (14)$$

donde $C_f \geq 0$ y η son parámetros que determinar.

Los mismos autores deducen las relaciones entre los exponentes siguientes:

$$\eta - \alpha - 1 + \gamma = 0 \quad (15)$$

$$\eta - \delta - 3\alpha + 2\gamma = 0 \quad (16)$$

$$\eta - 2\alpha + \beta - 1 + \gamma = 0 \quad (17)$$

en las cuales se debe notar que las ecuaciones (15) y (16) son válidas también en el caso en que la infiltración sea nula (canal impermeable).

De la combinación de las ecuaciones (15) y (16) se obtiene el resultado válido en canales rectangulares tanto impermeables como permeables (melgas):

$$\delta = \gamma - 2\alpha + 1 \quad (18)$$

y de las ecuaciones (15) y (17) se deduce el resultado válido en las melgas:

$$\alpha = \beta \quad (19)$$

En el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards se debe tener (Fuentes *et al.*, 2004):

$$C_f = \frac{C_q}{\sigma^3} \left\{ \sigma \left[(2\alpha - \gamma)\sigma + 2\beta\kappa S \right] - C_q C_p \right\} + \lim_{t \rightarrow 0} [g C_p t^{\eta - \delta}] \quad (20)$$

el límite existe si $\eta - \delta = 3/2 - 2\gamma \geq 0$; esto es, si $\gamma \leq 3/4$.

La ley de resistencia hidráulica utilizada en el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards en el riego por gravedad debe satisfacer el límite:



$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{vq(0,t)}{h^3(0,t)gJ(0,t)} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{vU(0,t)}{h^2(0,t)gJ(0,t)} \right] = C_K \quad (21)$$

donde $C_K = vC_q / \sigma^3 C_f$ es una constante adimensional

Mediante análisis dimensional Fuentes *et al.* (2004), determinan:

$$U = k \frac{h^{3d-1}}{v^{2d-1}} (gJ)^d \quad (22)$$

De esta ley se deduce la de Chézy haciendo $d = 1/2$ y la de Poiseuille cuando $d = 1$.

La expresión resultante de la ecuación (22) para el caudal unitario ($q = Uh$) es la siguiente:

$$q = kv \left(\frac{h^3 gJ}{v^2} \right)^d \quad (23)$$

De acuerdo con Fuentes (1992) el exponente d de esta ecuación tiene una interpretación fractal. Introduciendo una escala disipativa la ecuación (23) se escribe como:

$$q = kv \left(\frac{h}{\lambda_f} \right)^D, \quad \lambda_f^3 = \frac{v^2}{gJ}, \quad D = 3d \quad (24)$$

donde, en el formalismo de la geometría fractal de Mandelbrot (1983), D corresponde a una dimensión fractal de masa, y de acuerdo con el análisis precedente: $3/2 < D < 3$, el límite inferior corresponde a la ley de Chézy y el superior, a la ley de Poiseuille.

La ley fractal, de acuerdo con Fuentes *et al.* (2004):

$$(1-d)\gamma = d(2\alpha - 1) \quad (25)$$

Se debe observar que con $d = 1$, correspondiente a la ley de Poiseuille, se obtiene el resultado $\alpha = 1/2$, que no requiere como condición el comportamiento de la infiltración en tiempos muy cortos.



En el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards se satisface $\alpha = \beta = 1/2$ y, en consecuencia la ecuación (25) se transforma en $(1-d)\gamma = 0$. Para $1/2 \leq d < 1$ se deduce que $\gamma = 0$, lo que indica que las leyes correspondientes, como las de Chézy, Hazen-Williams y Prandtl-Blasius, sólo son aplicables cuando el caudal de riego tiende a una constante en el tiempo inicial. Puesto que para $d=1$ el exponente γ es arbitrario, la ley de Poiseuille es aplicable, independientemente del comportamiento de la función caudal de riego en tiempos muy cortos. Estos resultados se infieren también al evaluar el límite de la ecuación (21) con la ecuación (23):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{vq(0,t)}{h^3(0,t)gJ(0,t)} \right] = k \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{kv}{q(0,t)} \right]^{(1-d)/d} = C_k \quad (26)$$

con $d=1$ el límite es una constante ($C_k = k$) y para $1/2 \leq d < 1$ es necesario que $\lim_{t \rightarrow 0} q(0,t)$ sea igual a una constante q_e [$C_k = k(kv/q_e)^{(1-d)/d}$].

Algunas características de la solución del problema avance-infiltración se pueden establecer bajo algunas hipótesis. La evolución del tirante se obtiene con la introducción de la hipótesis del tiempo de contacto en las ecuaciones de Barré de Saint-Venant aplicadas en la cabecera de la melga ($x = 0$). Considerando que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{V_h(t-t_x)}{U_f(t_x)} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = - \frac{2q(x,t)}{h(t-t_x)} [V_h(t-t_x) + V_i(t-t_x)] + \frac{q^2(x,t)}{h^2(t-t_x)} \frac{V_h(t-t_x)}{U_f(t_x)} \quad (28)$$

en la posición $x = 0$ se tiene:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = - \frac{2q_0}{h(t)} [V_h(t) + V_i(t)] \quad (29)$$

donde $V_h(t) = dh/dt$ y $V_i(t) = dh/dt$.

Llevando la ecuación (29) a la ecuación (2), considerando la ley de resistencia definida por la ecuación (6), se obtiene en la cabecera de la melga:

$$\frac{dh}{dt} + \kappa \frac{dl}{dt} = \frac{\varpi}{2h} \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \right]; \quad \varpi = \frac{v}{k} \left(\frac{q_0}{kv} \right)^{(1-d)/d} \quad (30)$$



donde h_o es el tirante de agua definido por la pendiente topográfica conocido como tirante normal en un canal impermeable:

$$h_o = \sqrt[3]{\left(\frac{q_o}{kv}\right)^{\frac{1}{d}} \frac{v^2}{gJ_o}} \quad (31)$$

La expresión de la ascendibilidad se deduce al considerar que para un caudal de aporte constante se tiene en la ecuación (11) $\gamma = 0$ y $C_q = q_o$. Puesto que $\alpha = \beta = 1/2$ de la ecuación (18) se tiene $\delta = 0$ y de la ecuación (15) $\eta = 3/2$. De la ecuación (20) se tiene $C_f = q_o [\sigma(\sigma + \kappa S) - q_o C_p] / \sigma^3$, donde $C_p = -\partial h / \partial x$ cuando $x \rightarrow 0$ y $t \rightarrow 0$, de acuerdo con la ecuación (13). Pero en este límite $h(x, t) = \sigma \sqrt{t - t_x}$, y se deduce $\partial h / \partial x = -(\sigma / 2\sqrt{t - t_x})(2\sqrt{t_x} / A_v)$, o sea $C_p = 0$ y por lo tanto $C_f = q_o(\sigma + \kappa S) / \sigma^2$. De las ecuaciones (21) y (26) se deduce $\varpi = vq_o / \sigma^3 C_f$, es decir:

$$\sigma(\sigma + \kappa S) = \varpi = \frac{v}{k} \left(\frac{h_o}{\lambda_{fo}} \right)^{3-D} \quad (32)$$

y en consecuencia

$$\sigma = \sqrt{\varpi + \left(\frac{\kappa S}{2} \right)^2} - \frac{\kappa S}{2} \quad (33)$$

donde $\lambda_{fo}^3 = v^2 / gJ_o$, ecuación (24). Se debe observar que la ascendibilidad no depende de la viscosidad cinemática en el caso de Chézy ($d = 1/2$) y no depende del caudal en el caso de Poiseuille ($d = 1$).

La ecuación (30), considerando la ecuación (32), se escribe también como:

$$\frac{dh}{dt} + \kappa \frac{dl}{dt} = \frac{\sigma(\sigma + \kappa S)}{2h} \left[1 - \left(\frac{h}{h_o} \right)^3 \right] \quad (34)$$

El tirante de agua en tiempos largos (h_∞) se deduce de la ecuación cuando $dh/dt = 0$ y $dl/dt = K_s$ y satisface la ecuación cúbica siguiente:

$$\left(\frac{h_\infty}{h_o} \right)^3 + \alpha_o \left(\frac{h_\infty}{h_o} \right) - 1 = 0, \quad \alpha_o = \frac{2\kappa K_s h_o}{\varpi} = \frac{2\kappa K_s h_o}{\sigma(\sigma + \kappa S)} \quad (35)$$



cuya raíz real es la siguiente:

$$h_{\infty} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}\alpha_0^3} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}\alpha_0^3} - \frac{1}{2}} \right) h_0 \quad (36)$$

La ecuación diferencial contiene dos incógnitas, las funciones del tirante de agua $h(t)$ y la lámina infiltrada $l(t)$, haciendo necesaria otra ecuación para cerrar el sistema: la ecuación de Richards. Un caso especial de ésta es el modelo de Green y Ampt (1911) definido por:

$$\frac{dl}{dt} = K_s + \frac{S^2 + 2K_s h \Delta\theta}{2l} \quad (37)$$

donde $\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$, θ_s es el contenido de humedad a saturación y θ_0 es el contenido de humedad inicial.

La solución simultánea de las ecuaciones (34) y (37) proporcionan las funciones del tirante de agua y la lámina infiltrada en el tiempo. La solución es en general numérica, con algunas soluciones analíticas especiales.

Una posible solución al problema tirante-infiltración es de aproximar la evolución en el tiempo del tirante y enseguida encontrar la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada a partir de la integración la ecuación (34). En tiempos muy cortos se tiene $h = \sigma\sqrt{t}$ de donde $dh/dt = \sigma/2\sqrt{t}$ o sea $dh/dt = \sigma^2/2h$, el cual puede modificarse a $dh/dt = \sigma^2/2h + c$ para aplicarlo en tiempos largos cuando $h \rightarrow h_{\infty}$ y $dh/dt \rightarrow 0$, de donde $c = -\sigma^2/2h_{\infty}$. Se deduce la ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = \kappa_s \frac{h_{\infty} - h}{h} \quad (38)$$

donde $\kappa_s = \sigma^2/2h_{\infty}$ es un parámetro análogo a la conductividad hidráulica a saturación de la ley de Darcy.

La integración de las ecuaciones (34) y (38) con las condiciones $l=0$ y $h=0$ en $t=0$, considerando la regla de la cadena $dl/dt = (dh/dt)(dl/dh)$, conduce al sistema:

$$h + \kappa_s t = h_{\infty} \ln \left(\frac{h_{\infty}}{h_{\infty} - h} \right) \quad (39)$$



$$h + \kappa l = \frac{\omega}{2\kappa_s} \left\{ \left(\frac{h_\infty}{h_o} \right)^2 \left(\frac{h}{h_o} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_\infty}{h_o} \right) \left(\frac{h}{h_o} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{h_o} \right)^3 + \left[1 - \left(\frac{h_\infty}{h_o} \right)^3 \right] \ln \left(\frac{h_\infty}{h_\infty - h} \right) \right\} \quad (40)$$

en el cual se observa que la función $l(t)$ es de naturaleza paramétrica, es decir: $l=l(h)$ y $t=t(h)$. En la figura 1 se ilustra el comportamiento de variación del tirante dado por la ecuación (39).

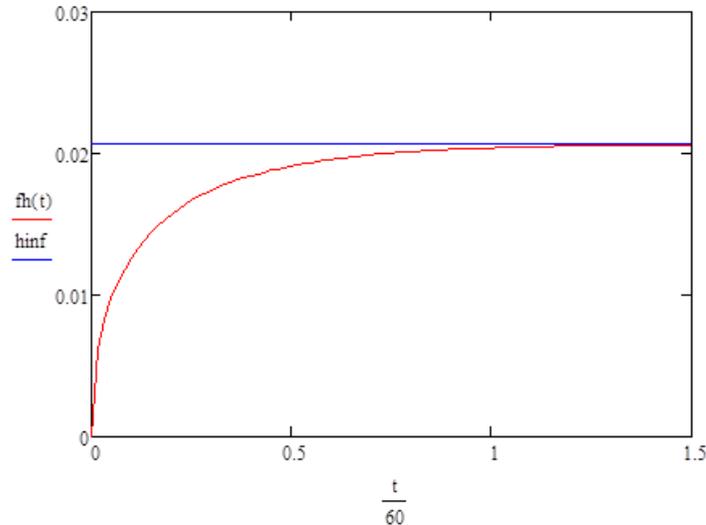


Figura 1. Evolución del tirante a la entrada de la melga.

En tiempos largos la velocidad de infiltración alcanza el régimen permanente. En una melga con un suelo profundo $V_i = K_s$, donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación. La onda de avance se encuentra en régimen permanente, $\partial h/\partial t = 0$ y $\partial q/\partial t = 0$. Las ecuaciones de Barré de Saint-Venant devienen:

$$\frac{dq}{dx} = -K_s \quad (41)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \lambda \frac{K_s q}{h} + gh \frac{dh}{dx} + gh(J - J_o) = 0 \quad (42)$$

La integración de la ecuación (41) con la condición en la cabecera de la melga conduce a $q = q_o - K_s x$, el caudal nulo corresponde a la posición última del frente de avance (x_∞). Se tiene:

$$q(x) = q_o \left(1 - \frac{x}{x_\infty} \right), \quad x_\infty = \frac{q_o}{K_s} \quad (43)$$



De la ecuación(42), considerando la ecuación(41), se deduce la ecuación diferencial ordinaria que define el perfil de la onda en régimen permanente, a saber:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_o - J + 2\kappa K_s q / gh^2}{1 - F^2}, \quad F^2 = \frac{q^2}{gh^3} = \frac{U^2}{gh} \quad (44)$$

donde F es el número de Froude.

En escritura adimensional la ecuación (44), considerando las ecuaciones (23), (31), (33) y (35), se escribe como sigue:

$$\frac{dh^*}{dx^*} = J_o^* \left[\frac{1 - q^{*1/d} / h^{*3} + \alpha_o q^* / h^{*2}}{1 - F_o^{*2} q^{*2} / h^{*3}} \right] \quad (45)$$

donde las variables adimensionales están definidas por:

$$F_o^2 = \frac{q_o^2}{gh_o^3}, \quad h^* = \frac{h}{h_o}, \quad x^* = \frac{x}{x_\infty}, \quad q^* = \frac{q}{q_o}, \quad J_o^* = \frac{J_o x_\infty}{h_o} \quad (46)$$

Para el caso en que $d = 1$ puede construirse una solución desarrollada alrededor de la posición del frente de avance es una serie en la raíz cuadrada. Con una corrección para proporcionar el valor correcto a la cabecera de la melga, Fuentes *et al.* (2012) proporcionan el resultado que se ilustra en la figura 2.

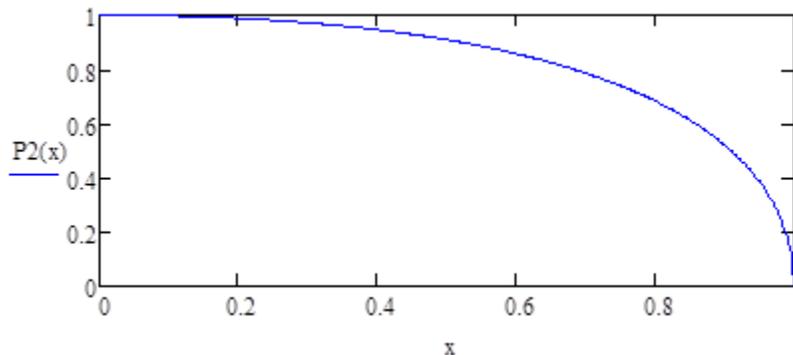


Figura 2. Perfil sobre la superficie.

Conclusiones

Se presenta una solución al problema tirante-infiltración aproximando la evolución en el tiempo del tirante y enseguida encontrando la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada. El resultado mejora el modelo de Lewis y Milne (1938) que asume tirante constante en modelo hidrológico.



Referencias Bibliográficas

- Fuentes, C., B. de León y F.R. Hernández-Saucedo. (2012). Hidráulica del riego por gravedad. Capítulo 1. En: Riego por Gravedad. Universidad Autónoma de Querétaro. pp. 1-60.
- Fuentes, C., B. De León, H. Saucedo, J.-Y. Parlange, A.C.D. Antonino. (2004). El sistema de ecuaciones de Saint Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica. Ingeniería Hidráulica en México, 19(2): 65-75.
- Landau, L., E. Lifchitz. (1989). Physique théorique. Mécanique des fluides. Tomo 6. Segunda edición. Moscú: Éditions Mir, 748 p.
- Lewis, M.R., W.E. Milne. (1938). Analysis of border irrigation. Agri. Engr., 19: 267-272.
- Rendón, P.L., C. Fuentes, S. Magaña. (1998). Capítulo 1: Diseño del riego por gravedad. In IV congreso internacional de sistemas de riego. Departamento de Irrigación, Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México. Volumen IV. pp. 1-1 a 1-17.
- Richards, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1: 318-333.