



## **MODELACIÓN DEL DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEO UTILIZANDO LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL**

**Erickdel Castillo Solís<sup>1\*</sup>; Heber E. Saucedo Rojas<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, C.P. 62550. México.

erickdel\_castillo@tlaloc.imta.mx (\*Autor de correspondencia)

<sup>2</sup>Gerencia de Aguas Subterráneas. Comisión Nacional del Agua. Avenida Insurgentes Sur 2416, Piso 9, Copilco El Bajo, C.P. 04340, Ciudad de México.

### **Resumen**

En este trabajo se presenta la modelación del drenaje agrícola subterráneo, utilizando la ecuación de Richards bidimensional, el cual forma parte de un proyecto más extenso que trata sobre la modelación del régimen de humedad de suelos agrícolas. El sistema de drenaje modelado, está representado por un rectángulo en cuyo centro se ubica un dren subterráneo. Las fronteras laterales de dicho rectángulo, se consideran fronteras cuya componente horizontal del flujo de Darcy es nula. También se usa una condición de flujo nulo en la frontera inferior para representar un estrato impermeable. En la superficie del suelo se propone una evapotranspiración de intensidad conocida, como una condición de frontera tipo Neumann con flujo igual a dicha intensidad. La frontera del dren ha sido considerada como una superficie de filtración haciendo uso de la ventaja que presenta el método del elemento finito para asignar fácilmente una condición de frontera a cada nudo localizado sobre la circunferencia del dren. De los resultados obtenidos, se puede concluir que el modelo describe correctamente el sistema de drenaje subterráneo.

**Palabras claves:** Régimen de humedad del suelo, Trópico húmedo, Suelos agrícolas.



## Introducción

En las zonas subhúmedas y en algunas partes de las zonas húmedas del trópico mexicano, aun cuando la precipitación anual es suficiente para satisfacer la demanda de los cultivos agrícolas, generalmente las lluvias se concentran en un período de tiempo muy corto de la estación lluviosa. Esto provoca problemas de exceso y déficit de humedad para los cultivos. Este exceso de lluvia en cierta época del año, provoca que los niveles freáticos asciendan, en algunos casos hasta la superficie del suelo. En estas zonas es necesario hacer un manejo adecuado del régimen de humedad del suelo, mediante el riego y drenaje.

Las interacciones fuertes y complejas entre los componentes de riego y drenaje, como la influencia de las variaciones en la precipitación y la evapotranspiración, pueden ser mejor descritos por el uso de modelos de simulación numérica, que pueden describir adecuadamente las necesidades de riego, el movimiento del agua y de las sales a través de la zona de las raíces y el flujo hacia los drenes. El enfoque integral de la modelación del riego y del drenaje será de gran utilidad para evaluar el impacto de los diseños alternativos de drenaje y los regímenes de riego.

En este trabajo se presenta la modelación del drenaje agrícola subterráneo, la cual forma parte de un proyecto más extenso sobre la modelación del régimen de humedad de suelos agrícolas, utilizando la ecuación de Richards bidimensional.

## Materiales y Métodos

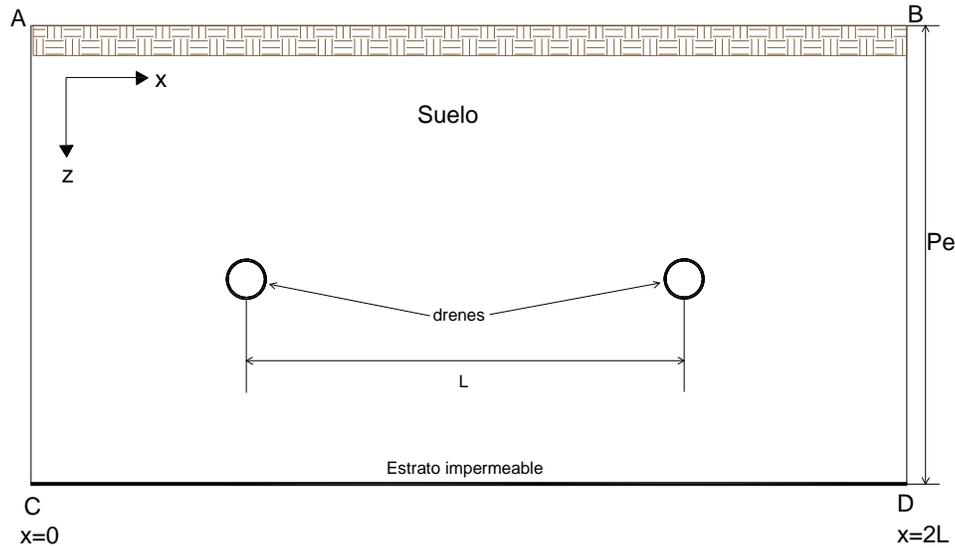
### La ecuación de Richards bidimensional

El movimiento del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo, se dice que es bidimensional, cuando las variaciones de la superficie libre en el sentido del dren son despreciables, es decir, el movimiento del agua ocurre en planos perpendiculares a la dirección de un dren. La ecuación que gobierna el proceso es (Richards, 1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - S \quad (1)$$

donde  $\psi = \psi(x, z, t)$  es el potencial de presión del agua en el suelo [L]; (el potencial gravitacional ha sido asimilado a la coordenada vertical  $z$  orientada positivamente en dirección descendente);  $x$  es la coordenada horizontal [L];  $t$ , el tiempo [T];  $K(\psi)$ , la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ];  $C(\psi) = d\theta(\psi)/d\psi$ , la capacidad específica [ $L^{-1}$ ];  $\theta = \theta(\psi)$ , el contenido volumétrico de agua [ $L^3L^{-3}$ ] y depende de la presión del agua en el suelo, esta dependencia es conocida como la característica de humedad o curva de retención;  $S$  es un término de sumidero que representa la extracción de agua por las plantas [ $T^{-1}$ ].

### Condiciones de frontera



**Figura 1.** Sistema de drenaje subterráneo.

Para describir el flujo de agua en un sistema de drenaje, es necesario conocer, además de la ecuación (1), el estado inicial del medio poroso y definir las condiciones de frontera. Si en el tiempo inicial se tiene un suelo saturado que no transfiere agua a la atmósfera, se puede suponer que la condición inicial es una distribución hidrostática de presiones, es decir:

$$\psi(x, z) = z \quad (2)$$

En sistemas de drenaje similares al mostrado en la figura 1, se tiene que en las fronteras laterales (fronteras AC y BD) la componente horizontal del flujo de Darcy es nula. También se usa una condición de flujo nulo en la frontera inferior para representar un estrato impermeable. Estas condiciones se expresan de la siguiente manera:

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0, \quad z \in \overline{AC} \quad (3)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 2L, \quad z \in \overline{BD} \quad (4)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} = 0 \quad x \in \overline{CD} \quad z = P_E \quad (5)$$

En la superficie del suelo se propone una evapotranspiración de intensidad conocida, como una condición de frontera tipo Neumann con flujo igual a dicha intensidad (i).



$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = i, \quad 0 \leq x \leq L, \quad z=0 \quad (6)$$

La frontera del dren ha sido considerada como una superficie de filtración (Neumann, 1973) haciendo uso de la ventaja que presenta el método del elemento finito para asignar fácilmente una condición de frontera a cada nudo localizado sobre la circunferencia del dren. Inicialmente se considera que no existe flujo en el dren y se tiene en cuenta una condición de frontera tipo Neumann sobre toda la circunferencia del mismo, situación que es conservada hasta que la superficie libre alcanza un nudo del dren, momento en el cual se cambia la condición tipo Neumann por una tipo Dirichlet con potencial cero.

El conjunto de ecuaciones anteriores describe el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo, considerando simultáneamente el flujo del agua en el suelo, el flujo del agua en el dren y las transferencias desarrolladas en la interfaz suelo dren y suelo atmósfera. Para aplicar este modelo matemático al análisis de sistemas de drenaje experimental o parcelario, es necesario disponer de una solución del mismo. Como su solución analítica no es conocida, es necesario el uso de métodos numéricos.

#### **Solución de la ecuación de Richards bidimensional con el método de elemento finito (Galerkin)**

La forma tridimensional (de la cual se puede obtener la forma bidimensional) de la ecuación del flujo de agua a través del medio poroso no saturado (sin tomar en cuenta el consumo de las plantas) en régimen transitorio se escribe (Istok, 1989):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (7)$$

donde  $K_x(\psi)$ ,  $K_y(\psi)$  y  $K_z(\psi)$  son las conductividades hidráulicas (las cuales están en función de la carga de presión) en las tres direcciones del eje coordenado (la dirección de la coordenada  $z$  se asume estar en la vertical), y  $C(\psi)$  es la capacidad de humedad específica.

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua. El valor desconocido en cada nodo es la carga de presión  $\psi$ . Por lo que se asume una solución aproximada para  $\psi$ , como  $\hat{\psi}$ , de la forma:

$$\hat{\psi}^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} \psi_i$$



donde  $\hat{\psi}^{(e)}$  es la solución aproximada para la presión de carga dentro del elemento  $e$  y  $N_i^{(e)}$  son las funciones de interpolación para cada nodo dentro del elemento  $e$ .

Cuando la solución aproximada es sustituida dentro de la ecuación 7, la ecuación diferencial no es satisfecha exactamente y un error o residual se presenta en cada punto en el dominio del problema. La contribución de cualquier elemento  $e$  al residual en el nodo  $i$  al cual el elemento está unido es:

$$R_i^{(e)} = - \iiint_{V^{(e)}} W_i^{(e)}(x, y, z) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} + 1 \right) \right) - C^{(e)}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \right] dx dy dz \quad (8)$$

donde  $W_i^{(e)}$  es la función de peso del elemento en el nodo  $i$ , y los límites de integración se escogen para representar el volumen del elemento  $e$ .

En el método de Galerkin se escoge la función de peso para cada nodo en el elemento para ser igual a la función de interpolación del elemento para ese nodo  $W_i^{(e)} = N_i^{(e)}$ . Si se asume que la conductividad hidráulica no saturada y la capacidad de humedad específica son constantes dentro de un elemento (pero puede variar de un elemento al siguiente), y que las fuerzas de gravedad son pequeñas, la ecuación 8 se puede escribir como:

$$R_i^{(e)} = - \iiint_{V^{(e)}} N_i^{(e)}(x, y, z) \left[ K_x^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + K_y^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} + K_z^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} - C^{(e)}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \right] dx dy dz$$

$$= - \iiint_{V^{(e)}} N_i^{(e)} \left[ K_x^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + K_y^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} + K_z^{(e)}(\psi) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} \right] dx dy dz + \iiint_{V^{(e)}} N_i^{(e)} C^{(e)}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} dx dy dz \quad (9)$$

donde  $C^{(e)}(\psi)$  es la capacidad específica de humedad dentro del elemento  $e$ .

De acuerdo a Istok (1989), las integrales de la ecuación 9 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ \vdots \\ R_n^{(e)} \end{Bmatrix}_K = [K^{(e)}(\psi)] \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{Bmatrix}$$

y



$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ \vdots \\ R_n^{(e)} \end{Bmatrix}_c = [C^{(e)}(\psi)] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{Bmatrix}$$

donde  $[K^{(e)}(\psi)]$  y  $[C^{(e)}(\psi)]$  son las matrices de las formas no saturadas de conductividad y capacidad específica para el elemento e. Se pueden usar dos tipos diferentes de funciones de interpolación para evaluar la integral:

$$\iiint_{V^{(e)}} N_i^{(e)} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} dx dy dz$$

y obtener la forma computacional para  $[C^{(e)}(\psi)]$ . En la formulación del elemento consistente, se usan las mismas funciones de interpolación para definir la derivada temporal de la solución aproximada para la presión de carga dentro de un elemento,  $\frac{\partial \hat{\psi}^{(e)}}{\partial t}$ , como los usados para definir la solución aproximada para la presión de carga  $\psi$

$$\frac{\partial \hat{\psi}^{(e)}}{\partial t}(x, y, z) = [N_1^{(e)}(x, y, z) \dots N_n^{(e)}(x, y, z)] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{Bmatrix}$$

donde  $N_1^{(e)}$  son las funciones de interpolación y  $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$  son las (desconocidas) derivadas temporales de la presión de carga en cada nodo dentro del elemento e. Para esta selección de las funciones de interpolación, se puede escribir la forma no saturada del elemento de matriz de capacitancia como:

$$[C^{(e)}(\psi)] = \iiint_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{bmatrix} [C^{(e)}(\psi)] [N_1^{(e)} \dots N_n^{(e)}] dx dy dz$$

La forma global no saturada de la matriz de capacitancia se obtiene combinando las matrices de capacitancia de los elementos para todos los elementos de la malla.

$$[C(\psi)] = \sum_{e=1}^m [C^{(e)}(\psi)]$$

donde hay m elementos en la malla. Sustituyendo las formulaciones de la matriz para cada integral en el lado derecho de la ecuación 9, la formulación del residuo pesado para la ecuación del flujo no saturado transitorio es:

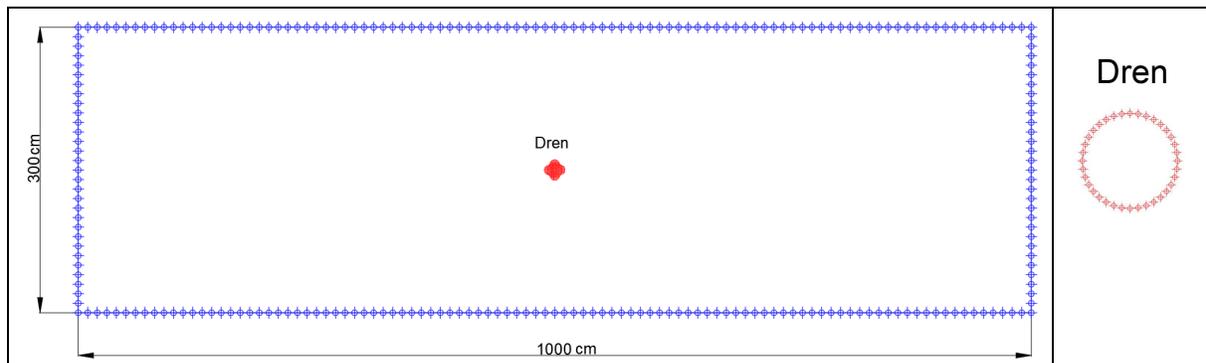
$$[C(\psi)] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_p}{\partial t} \end{Bmatrix} + [K(\psi)] \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_p \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (10)$$

Si se define  $\{\dot{\psi}\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}$  la ecuación 10 puede escribirse como:

$$[C(\psi)]\{\dot{\psi}\} + [K(\psi)]\{\psi\} = \{F\}$$

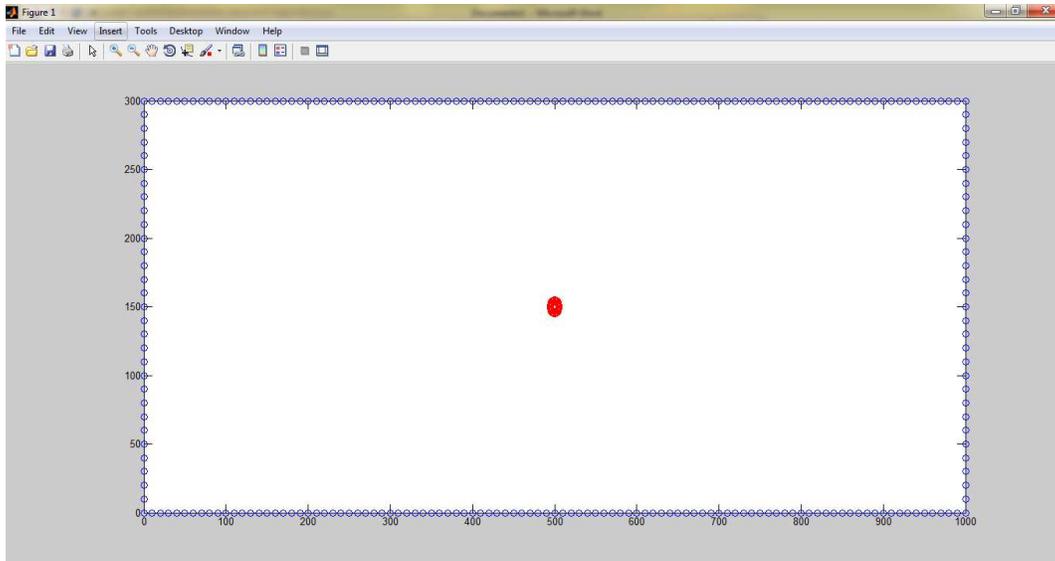
### Elaboración de la malla

Como primer paso para la elaboración de la malla, se dibujó la geometría del dominio (un rectángulo) y en medio, el dren agrícola subterráneo (círculo). En las fronteras del dominio y del dren se colocaron los nodos, de los cuales se obtuvieron sus coordenadas.



**Figura 2.** Dominio del problema y detalle del dren subterráneo.

Las coordenadas de los nodos y del dren se ingresaron al programa MESH2D (Engwirda, 2014), el cual es un generador de malla no estructurada basado en MATLAB, este mallador utiliza técnicas de triangulación y optimización de malla basadas en el método Delaunay. Los nodos del dominio y del dren incorporados en el programa MESH2D, se presentan en la figura 3.

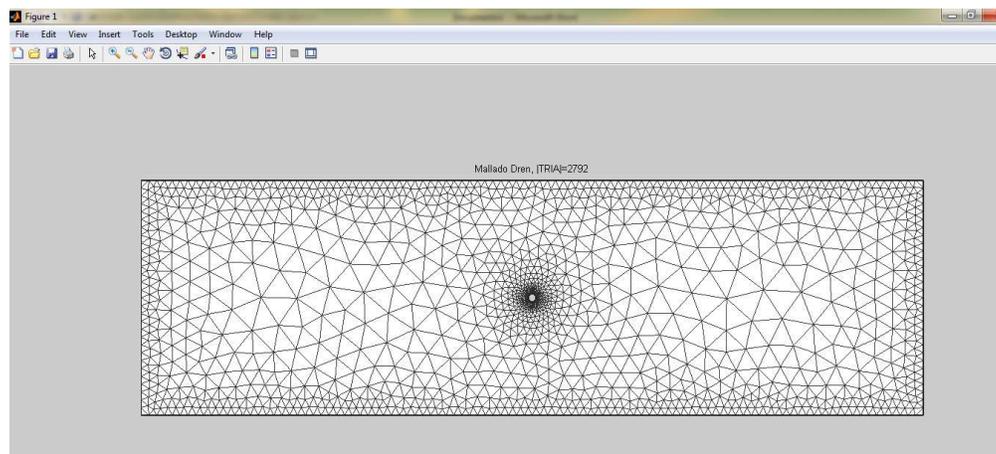


**Figura 3.** Nodos ingresados al programa MESH2D.

## Resultados y Discusión

### Malla

La malla generada con el programa MESH2D, se presenta en la siguiente figura. Se obtuvieron las coordenadas de los nodos generados (1544 nodos) y los nodos que forman a los elementos triangulares (2792 elementos).

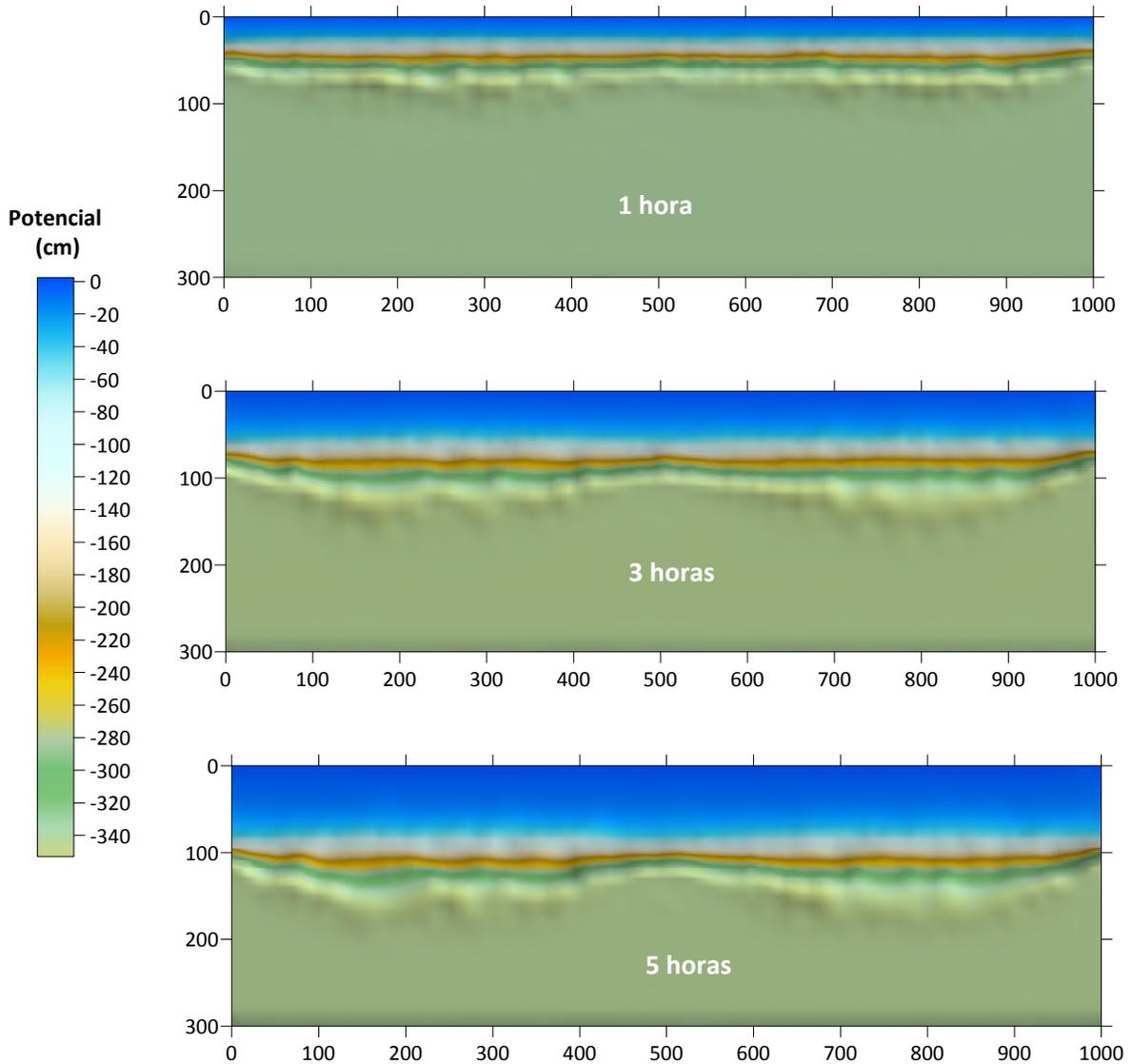


**Figura 4.** Malla generada con el programa MESH2D.

Los archivos de las coordenadas de los nodos, y de los nodos de los elementos triangulares fueron incorporados al código de la solución de la ecuación de Richards Bidimensional, así como las condiciones de frontera y después ejecutado en Matlab.



En las siguientes ilustraciones se muestra el comportamiento a 1, 3 y 5 horas de simulación, del potencial de presión del agua en el suelo, obtenido a partir de los resultados del programa.



**Figura 4.** Potencial de presión del agua en el suelo

## Conclusiones

En este trabajo se modeló numéricamente el drenaje agrícola subterráneo, mediante la solución de la ecuación de Richards en dos dimensiones, utilizando el método del elemento finito. De los resultados obtenidos, se puede concluir que el modelo describe correctamente el sistema de drenaje subterráneo.



## Referencias Bibliográficas

- Engwirda, D. (2014). Locally optimal Delaunay-refinement and optimisation-based mesh generation. Thesis-University of Sydney.
- Istok, J. (1989) Groundwater modeling by the finite element method. American Geophysical Union, Washington, DC. p. 495.
- Neuman, S. P. (1973). Saturated-unsaturated seepage by finite elements. In J. HYDRAUL. DIV., PROC., ASCE.
- Richards, L. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics 1: pp 3018-333.