Artículo: COMEII-16054

II CONGRESO NACIONAL
DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2016
Chapingo, Edo. de México, del 08 al 10 de septiembre

MODELACIÓN EN RÉGIMEN PERMANENTE DE POZOS DE INFILTRACIÓN EN SUELOS ESTRATIFICADOS

Carlos Fuentes[1*]; Felipe Zataráin[1]

[1]Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos. C.P. 62550. cfuentes@tlaloc.imta.mx (*Autor para correspondencia).

Resumen

En áreas urbanas con fuertes problemas de inundación, los pozos de infiltración se han utilizado para transferir las aguas de escorrentía al subsuelo; la profundidad de los pozos es del orden de un metro. En regiones con acuíferos sobreexplotados las aguas de escorrentía se transfieren al subsuelo con la finalidad de recargar el acuífero o para mantener niveles de humedad disponibles en el suelo. Entre estos pozos se distinguen los pozos de recarga, cuya profundidad es tal que una parte del mismo se encuentra dentro del acuífero y los pozos de absorción o infiltración cuya base queda ubicada por encima del mismo. Dada su importancia se presenta la ecuación diferencial en régimen transitorio que describe la transferencia de agua desde el pozo hacia medios porosos heterogéneos y anisótropos, con énfasis en los pozos de infiltración, así como las condiciones iniciales y de frontera; se presentan las ecuaciones particulares para medios heterogéneos e isótropos y para medios homogéneos e isótropos. Se deduce una solución analítica clásica para medios homogéneos e isótropos en régimen permanente. Esta solución es aquí adaptada a medios heterogéneos e isótropos para describir el flujo permanente del agua desde un pozo de infiltración. Se ilustra la manera de utilizar la solución en un pozo cuyo perfil está compuesto de varios estratos bien diferenciados para la caracterización hidráulica del mismo, problema inverso, y para describir el flujo del agua, problema directo. Esta solución analítica deberá ser validada con la solución, generalmente numérica, de la ecuación diferencial general para medios heterogéneos e isótropos en régimen transitorio en tiempos muy grandes.

Palabras clave adicionales: Medios heterogéneos y anisótropos, medios homogéneos e isótropos, regímenes transitorio y permanente, solución analítica permanente en perfiles estratificados.

Introducción

Los pozos de infiltración son utilizados para contribuir a la evacuación de las lluvias en áreas urbanas y también como un mecanismo para recargar los acuíferos en regiones en donde éstos presentan un abatimiento insostenible.

En áreas urbanas se han utilizados los pozos de infiltración con profundidad del orden de un metro para transferir las aguas de escorrentía al subsuelo. En regiones con acuíferos sobreexplotados las aguas superficiales se transfieren al subsuelo confines de recarga o para mantener niveles de humedad en el suelo disponibles para las plantas.

Entre los pozos se distinguen los pozos propiamente de recarga de acuíferos, cuya profundidad es tal que una parte queda inmersa dentro del acuífero principal en explotación y los pozos de absorción o infiltración cuya base queda ubicada por encima de la superficie del mismo.

Dada la importancia de los pozos de infiltración o recarga esta comunicación tiene como objetivos:

El establecimiento de la ecuación diferencial en régimen transitorio que describe la transferencia de agua desde el pozo hacia medios porosos heterogéneos y anisótropos, con énfasis en los pozos de infiltración, y las condiciones iniciales y de frontera. Se establecen también las ecuaciones particulares para medios heterogéneos e isótropos y medios homogéneos e isótropos.

La deducción de una solución analítica clásica para medios homogéneos e isótropos en régimen permanente y su adaptación a medios heterogéneos e isótropos para describir el flujo permanente del agua desde un pozo de infiltración.

Materiales y métodos

Ecuaciones de base

El fenómeno de la infiltración en los medios porosos puede ser estudiado a partir de los principios generales de la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. La ecuación que resulta de la aplicación del primer principio es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \tag{1}$$

Como ecuación dinámica se utiliza la ley de Darcy generalizada a los medios porosos parcialmente saturados:

$$\vec{q} = -K \nabla H ; \quad H = \psi + z \tag{2}$$

donde H es el potencial hidráulico y es la suma del potencial de presión (ψ) y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical (z) orientada en este caso como positiva hacia arriba, el potencial de presión es positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada, ya que se conviene que la presión nula corresponde a la presión atmosférica; $\theta = \theta(\psi)$ es el contenido volumétrico de agua, también denominado contenido de humedad, y es una función de la presión del agua, $\theta(\psi)$ es conocida como la curva de retención o característica de humedad del suelo; $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ es el caudal de agua por unidad de superficie de suelo o flujo de Darcy, con sus componentes en un sistema rectangular; (x, y, z) son las coordenadas espaciales en un sistema rectangular o cartesiano, t es el tiempo; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; $K = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica como una función de la presión del agua, que en medios heterogéneos y anisótropos es un tensor.

Así, la ecuación general de flujo en un medio poroso resulta de la combinación de las ecuaciones (1) y (2), a saber:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left[K(\psi) \nabla (\psi + z) \right] \qquad (3)$$

Esta ecuación presenta dos variables independientes, θ y ψ, pero como existe una relación entre ellas se introduce la capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención. Se aplica la regla de la cadena y se establece la ecuación con variable dependiente la presión, conocida como la ecuación de Richards (1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot \left[K(\psi) \nabla \psi \right] + \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \qquad C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \qquad (4)$$

En algunos problemas el análisis se simplifica si la ecuación (4) se escribe en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Le ecuación de Richards en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) es la siguiente:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (5)$$

donde r es el radio y φ es el azimut: $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

En coordenadas esféricas $(\rho, \vartheta, \varphi)$ la ecuación de Richards se escribe como:

$$C(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho^2 K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right]+\frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right]+\frac{\partial K}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{6}$$

donde ρ es el radio, ϑ es el ángulo polar o colatitud y φ es el azimut: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$.

En un pozo simétrico con respecto al eje z, el radio r toma como origen este eje, la ecuación (5) es muy útil para el análisis de la infiltración cuando se supone que la presión no depende del azimut, es decir cuando la heterogeneidad se presenta por capas. En tal caso la ecuación se simplifica a una ecuación que define la presión en sólo dos coordenadas espaciales (r,z). La ecuación en coordenadas esféricas es de importancia muy particular cuando en el análisis de un problema se considera que el medio es homogéneo e isótropo, es decir cuando el fenómeno no depende ni de la colatitud ni del azimut. En esta situación la presión sólo es una función de sólo dos coordenadas espaciales (ρ,z).

Para describir la transferencia de agua desde los pozos al medio poroso con las ecuaciones diferenciales anteriormente expuestas es imprescindible sujetarla a condiciones iniciales y de frontera específicas. A título de ilustración considérense las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, la condición inicial es el estado de la presión en todo el dominio al inicio de la simulación, a saber:

$$\psi(r,z,0) = \psi_o(r,z) \tag{7}$$

La condición en la frontera del suelo en contacto con un pozo de radio $r = R$ lleno de agua hasta una altura $z = H$, contada a partir de la base del mismo, $z = 0$, se establece aceptando una distribución hidrostática de presiones como sigue:

$$\psi(R,z,t) = H - z\,; \qquad \psi(0 \le r \le R, 0, t) = H \tag{8}$$

En cuanto a la condición de frontera lejos del pozo se puede tomar como igual a la presión inicial pero para todo tiempo o condiciones de flujo conocido, generalmente nulo tanto en la dirección radial como en la vertical.

Enseguida se analiza el fenómeno de la infiltración en pozos en régimen permanente.

Régimen permanente

Un modelo conceptual

Los flujos de Darcy en las direcciones radial y vertical son proporcionados por:

$$\vec{q}_r = -K_s \frac{\partial \psi}{\partial r}\hat{r} \tag{9}$$

$$\vec{q}_z = -\left(K_s \frac{\partial \psi}{\partial z} + K_s\right)\hat{k} \tag{10}$$

donde $\hat{r}$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios en las direcciones r y z espectivamente.

El caudal a través de la pared y la base del pozo queda definido por:

$$Q_s = \int_{A_p} \vec{q}_r \cdot dA_p + \int_{A_b} \vec{q}_z \cdot dA_b \tag{11}$$

donde dA_p y dA_b son, respectivamente, las áreas diferenciales en la pared y en la base del pozo definidas por:

$$dA_p = \left(2\pi R dz\right)\hat{r} \tag{12}$$

$$dA_b = \left(2\pi r dr\right)\left(-\hat{k}\right) \tag{13}$$

La ecuación (11), considerando las ecuaciones (9), (10), (12) y (13), se escribe de la siguiente manera:

$$Q_s = -2\pi R K_s \int_0^H \left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{r=R} dz + 2\pi K_s \int_0^R \left.\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|_{z=0} r dr + \pi K_s R^2 \tag{14}$$

Introduciendo las variables adimensionales:

$$z^* = \frac{z}{H}; \qquad r^* = \frac{r}{R}; \qquad \psi^* = \frac{\psi}{H} \tag{15}$$

la ecuación (14) se escribe como sigue

$$Q_s = Q_o + \pi K_s R^2; \quad Q_o = \frac{2\pi K_s H^2}{C} \tag{16}$$

donde C es un coeficiente de forma definido por:

$$\frac{1}{C} = -\int_0^1 \left.\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} dz^* + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^1 \left.\frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}\right|_{z^*=0} r^* dr^* \qquad (17)$$

Para encontrar el coeficiente de forma es necesario conocer $\psi(r,z)$.

El modelo de Glover

De acuerdo con Glover (Zangar, 1953) en una primera aproximación, el flujo de presión en régimen permanente a través de un pozo de infiltración en un medio poroso homogéneo e isótropo, puede ser descrito con la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas que describe la presión en ausencia de gradientes gravitacionales. De la ecuación (6) se tiene:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) = 0 \qquad (18)$$

la cual debe ser sujeta a las condiciones de frontera:

$$\psi = \psi_R; \qquad \rho = R \qquad (19)$$

$$\psi = 0; \qquad \rho \to \infty \qquad (20)$$

La integración de la ecuación (18) conduce a $\psi = -c_1\rho^{-1} + c_2$, donde c_1 y c_2 son dos constantes de integración; la ecuación (20) implica $c_2 = 0$ y la ecuación (19) $c_1 = -\psi_R R$, es decir $\psi = \psi_R (R/\rho)$. El flujo de Darcy es $q_\rho = -K_s\,\partial\psi/\partial\rho = K_s\psi_R\left(R/\rho^2\right)$, y en particular en $\rho = R$, $q_R = K_s\,\psi_R/R$; el caudal que pasa por la superficie de la esfera de radio R es $q_o = 4\pi R^2 q_R = 4\pi K_s R\psi_R$; este caudal de la fuente puntual en el centro de la esfera es la variable de interés. Puesto que $\psi_R R = q_o/4\pi K_s$, es mejor establecer la variación de la presión alrededor del caudal fuente para continuar con el enfoque de Glover:

$$\psi = \frac{q_o}{4\pi K_s \rho} \qquad (21)$$

Si h representa la posición del centro de la esfera a partir de la base entonces la coordenada esférica (ρ) y la coordenada cilíndrica (r) están relacionadas por:

$$\rho = \sqrt{r^2 + (z-h)^2} \qquad (22)$$

La presión en términos de las coordenadas cilíndricas se obtiene con la introducción de la ecuación (22) en la ecuación (21):

$$\psi = \frac{q_o}{4\pi K_s \sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \tag{23}$$

Para proveer una serie de fuentes puntuales cuya magnitud incremente con la profundidad, se propone una expresión similar a la propuesta originalmente por Glover:

$$dq_o = B(h_c - h)dh \tag{24}$$

donde B es un parámetro a determinar y h_c define el intervalo de las fuentes $h_o \le h \le h_c$ y sumideros $h_c < h \le h_s$.

El caudal total se encuentra mediante la integración de la ecuación (24):

$$Q_o = B\int_{h_o}^{h_s}(h_c - h)dh = \tfrac{1}{2}BH^2\left[\left(h_c^* - h_o^*\right)^2 - \left(h_c^* - h_s^*\right)^2\right] \tag{25}$$

de aquí se deduce el parámetro B

$$B = \frac{2Q_o}{H^2\left[\left(h_c^* - h_o^*\right)^2 - \left(h_c^* - h_s^*\right)^2\right]} \tag{26}$$

donde $h^* = h/H$ para todos los subíndices.

De las ecuaciones (23), (24) y (26) se tiene:

$$d\psi = \frac{Q_o(h_c - h)}{2\pi K_s H^2\left[\left(h_c^* - h_o^*\right)^2 - \left(h_c^* - h_s^*\right)^2\right]\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}dh \tag{27}$$

cuya integración conduce a:

$$\psi = \frac{Q_o}{2\pi K_s H^2\left[\left(h_c^* - h_o^*\right)^2 - \left(h_c^* - h_s^*\right)^2\right]}\left[(h_c - z)\operatorname{asinh}\left(\frac{z-h}{r}\right) + \sqrt{r^2 + (z-h)^2}\right]_{h=h_s}^{h=h_o} \tag{28}$$

o sea

$$\psi = \frac{Q_o}{2\pi K_s H^2} \frac{\left[\begin{array}{l} (h_c - z)\,\mathrm{asinh}\left(\frac{z - h_o}{r}\right) - (h_c - z)\,\mathrm{asinh}\left(\frac{z - h_s}{r}\right) \\ + \sqrt{r^2 + (z - h_o)^2} - \sqrt{r^2 + (z - h_s)^2} \end{array} \right]}{\left[(h_c^* - h_o^*)^2 - (h_c^* - h_s^*)^2 \right]} \tag{29}$$

En el punto sobre la frontera $(r,z) = (R,0)$ se tiene que $\psi = H$, lo que permite obtener la expresión del caudal, ecuación (16):

$$Q_o = \frac{2\pi K_s H^2}{C} \tag{30}$$

en donde el coeficiente de forma está definido por:

$$C = \frac{h_c^* \left[\mathrm{asinh}\left(\frac{H}{R} h_s^*\right) - \mathrm{asinh}\left(\frac{H}{R} h_o^*\right) \right] + \sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + h_o^{*2}} - \sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + h_s^{*2}}}{(h_c^* - h_o^*)^2 - (h_c^* - h_s^*)^2} \tag{31}$$

La fórmula de Glover se deduce de la ecuación (31) haciendo $h_c^* = 1$, $h_o^* = 0$ y $h_s^* = 1$, a saber:

$$C = \mathrm{asinh}\left(\frac{H}{R}\right) + \frac{R}{H} - \sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + 1} \tag{32}$$

El modelo de media-fuente

Este modelo propuesto por Reynolds *et al*. (1983) asume $h_c^* = 1/2$, $h_o^* = 0$ y $h_s^* = 1/2$, razón por la cual también es conocido como de media fuente, a saber:

$$C = 4\left[\frac{1}{2}\mathrm{asinh}\left(\frac{H}{2R}\right) + \frac{R}{H} - \sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right] \tag{33}$$

Un modelo para medios porosos estratificados

El modelo de Glover puede ser adaptado para el caso de medios porosos estratificados. Se considera que el pozo está en un medio compuesto de N estratos de espesor P_j, $j = 1,2,...,N$; la carga hidráulica total, denotada por H_T, es la altura de la columna de agua contada desde la base del pozo hasta la frontera superior del N-ésimo estrato.

El caudal infiltrado por las paredes del j-ésimo estrato es proporcionado por la ecuación (30) modificada como:

$$Q_{oj} = \frac{2\pi K_{sj} P_j^2}{C_j} \quad (34)$$

donde K_{sj} y C_j son la conductividad hidráulica saturada y el coeficiente de forma del j-ésimo estrato, respectivamente.

El coeficiente de forma se deduce de la ecuación (31) denotando por H_j la carga hidráulica en la base del j-ésimo estrato:

$$C_j = h_{pj}^* \frac{h_{cj}^* \left[a\sinh\left(\frac{P_j}{R} h_{sj}^* \right) - a\sinh\left(\frac{P_j}{R} h_{oj}^* \right) \right] + \sqrt{\left(\frac{R}{P_j} \right)^2 + h_{oj}^{*2}} - \sqrt{\left(\frac{R}{P_j} \right)^2 + h_{sj}^{*2}}}{\left(h_{cj}^* - h_{oj}^* \right)^2 - \left(h_{cj}^* - h_{sj}^* \right)^2} \quad (35)$$

donde $h_{pj}^* = P_j / H_j$, $h_{cj}^* = h_{cj} / P_j$, $h_{oj}^* = h_{oj} / P_j$, $h_{sj}^* = h_{sj} / P_j$. Se señala que h_{cj}, h_{oj} y h_{sj} están contadas a partir de la base del j-ésimo estrato.

Un modelo de media fuente asume $h_c^* = 1/2$, $h_o^* = 0$ y $h_s^* = 1/2$ y en consecuencia:

$$C_j = 4\left[\frac{1}{2} a\sinh\left(\frac{P_j}{2R} \right) + \frac{R}{P_j} - \sqrt{\left(\frac{R}{P_j} \right)^2 + \frac{1}{4}} \right] h_{pj} \quad (36)$$

El caudal total se obtiene como:

$$Q = \sum_{j=1}^{N} Q_{oj} + \pi R^2 K_{s1} \quad (37)$$

en donde se ha agregado el caudal en la base del pozo.

Tabla1. Cálculo de la conductividad hidráulica por estrato, ecuación (30).

Estrato	H (m)	Q (l/s)	C	K_s (m/d)
1	12	0.0284	4.9632	0.0134
2	4	0.3368	3.0113	0.8592
3	10	0.8116	4.6239	0.5142
4	6	1.0145	3.7017	1.4231
5	4	1.6232	3.0113	4.1405

Tabla 2. Cálculo del caudal por estrato correspondiente a pozo lleno, ecuaciones (34) y (36). En la última fila se encuentra el caudal total, ecuación (37), y la conductividad hidráulica saturada correspondiente a un estrato homogéneo equivalente.

Estrato	P (m)	K_s (m/d)	H (m)	C	Q (l/s)
1	12	0.0134	36	1.6544	0.085
2	4	0.8592	24	0.5019	1.992
3	10	0.5142	20	2.3119	1.617
4	6	1.4231	10	2.2210	1.677
5	4	4.1405	4	3.0113	1.600
Equivalente	36	0.5231	36	7.0749	6.972

Aplicaciones

A título de ilustración considérese que en un acuífero se ha construido un pozo de infiltración de radio $R = 0.3937\,m$ y profundidad $P_T = 36\,m$; en el perfil se localizaron cinco estratos. Conforme se iba perforando se fueron realizando las pruebas de infiltración por estrato hasta alcanzar el régimen permanente. Los datos se concentran en la Tabla 1, asimismo se muestra la conductividad hidráulica saturada calculada a partir de la ecuación (16). En la Tabla 2 se muestran los caudales calculados por cada estrato cuando el pozo se encuentra lleno.

Conclusiones

Se ha establecido la ecuación diferencial que describe la transferencia de agua desde un pozo hacia medios porosos heterogéneos y anisótropos, así como las condiciones iniciales y de frontera a que debe sujetarse en pozos de infiltración; en particular se han caracterizado las ecuaciones particulares para medios heterogéneos e isótropos y para medios homogéneos e isótropos.

Se ha deducido de manera concisa una solución analítica clásica en régimen permanente para medios homogéneos e isótropos. La solución ha sido adaptada a medios estratificados, considerando isótropo cada estrato, para describir el flujo permanente del agua desde el pozo de infiltración. La solución ha sido ilustrada para la caracterización hidráulica de pozos estratificados y para describir el flujo del agua por estratos y total del pozo, con resultados consistentes. Sin embargo, esta solución analítica deberá ser validada con la solución, generalmente numérica, de la ecuación diferencial general para medios heterogéneos e isótropos en régimen transitorio en tiempos muy grandes.

Referencias bibliográficas

Reynolds W.D., Elrick, D.E. In situ measurement of field - saturated hydraulic conductivity, sorptivity and the -parameter using the Guelph permeameter. Soil Sci., vol. 140, núm. 4, 1985, pp. 292 - 302.

Richards, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics. Vol. 1, 1931, pp. 318-333.

Zangar, C.N. Theory and problems of water percolation. United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Engineering Monographs No. 8, 1953, 70 p.