



## I CONGRESO NACIONAL COMEII 2015

### Reunión anual de riego y drenaje

Jiutepec, Morelos, México, 23 y 24 de noviembre

#### SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS APLICANDO EL GRADIENTE CONJUGADO PARA PROBLEMAS NO LINEALES

Juan Carlos Mota<sup>1</sup>; Carlos Chávez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, C.U. Cerro de las Campanas, 76010, Querétaro, México.

#### Resumen

La descripción de la transferencia del agua en el medio poroso se realiza con la ecuación de Richards. Para resolverla, se han desarrollado numerosas soluciones tanto analíticas como numéricas. Las primeras se utilizan solo para algunos casos especiales, siendo así a los fenómenos que ocurren en la naturaleza, por otra parte, los métodos numéricos ofrecen una mayor ventaja al poder usar diferentes condiciones en las fronteras, por lo que su aplicabilidad no es cuestionable. Sin embargo, algunos de los métodos numéricos desarrollados tienen el problema de que son muy inestables en la discretización espacio-temporal y esto hace que la discretización espacial sea muy dependiente de la discretización temporal y viceversa, siendo lo anterior una limitante, ya que se requiere de una función que ligue una a la otra para que la convergencia sea estable. En este artículo se presenta un método para minimizar ese problema usando el gradiente conjugado junto con el método de diferencias finitas para solucionar la ecuación de Richards sin depender tanto de la discretización. La solución aplicada al fenómeno inverso es 20% más rápido que la soluciones convencionales, además de que ya no se requiere de una función en especial para discretizar el espacio-tiempo.

**Palabras clave:** Transferencia del agua, métodos numéricos, discretización espacio-temporal.



## Introducción

La descripción del movimiento del agua en la superficie del suelo y la infiltración se realiza a través de ecuaciones diferenciales. El movimiento en la superficie del suelo generalmente es modelado con las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones como los modelos de onda difusiva, inercia nula e hidrológico. La infiltración es modelada con soluciones numéricas o analíticas de la ecuación de Richards (1931). Las soluciones analíticas se establecen bajo condiciones de isotropía y homogeneidad de los medios y en tal sentido, la aplicabilidad que tiene es limitada. Existen por otra parte métodos numéricos que permiten incorporar la anisotropía y heterogeneidad del espacio con la finalidad de representar los fenómenos de riego y drenaje que se dan.

La ecuación general de transferencia de agua en el suelo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\Psi) \cdot \nabla \Psi) - \frac{dK}{d\Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Upsilon \quad (1)$$

resulta de la combinación de la ecuación de continuidad que resulta del principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \Upsilon \quad (2)$$

y de la ley de Darcy (1856), argumentada experimentalmente, que representa la ecuación dinámica que resulta del principio de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{q} = -K(\Psi)\nabla H \quad H = \Psi - z \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua, también denominado contenido de humedad;  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  es el caudal de agua por unidad de superficie de suelo, o flujo de Darcy, con sus componentes en las direcciones del espacio  $(x, y, z)$ ;  $t$  es el tiempo;  $\Upsilon$  es un término de fuente o sumidero como el volumen de agua extraído por las plantas por unidad de volumen de suelo y en la unidad de tiempo;  $H$  es el potencial hidráulico o carga hidráulica, siendo igual a la suma del potencial de presión ( $\psi$ ), el cual es negativo en la zona no saturada del suelo y positivo en la zona saturada, y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo ( $z$ );  $K$  es la conductividad hidráulica del suelo parcialmente saturado y depende de la presión o del contenido de humedad. Las relaciones  $\theta(\psi)$  y  $K(\psi)$  son llamadas características hidrodinámicas del suelo.



La ecuación diferencial contiene aparentemente dos variables dependientes: el contenido de humedad y la presión del agua, pero están relacionadas a través de la curva de retención. Con la introducción de la capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención:

$$C(\Psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \quad (4)$$

es decir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\Psi) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (5)$$

en la ecuación sólo aparece la humedad ( $\theta$ ) como variable dependiente y es conocida como la ecuación de Richards (1931).

En este trabajo, se presenta una solución de la ecuación diferencial unidimensional vertical de Richards, usando el método de diferencias finitas en conjunto con el método del gradiente conjugado para problemas no lineales. Finalmente, la solución presentada, es utilizada para reproducir los datos experimentales que son obtenidos de una prueba de infiltración en un módulo de drenaje realizado en laboratorio.

### Materiales y métodos

Para simular la infiltración de agua en el suelo se utiliza la ecuación de Richards que en su forma unidimensional se expresa de la siguiente manera:

$$C(\Psi) \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dz} \left( K(\Psi) \left( \frac{d\Psi}{dz} - 1 \right) \right) + T \quad (6)$$

Donde  $\Psi$  es la presión en el suelo,  $C(\Psi)$  es la capacidad específica y  $K(\Psi)$  es la conductividad hidráulica.

El modelo de Van Genuchten (1980) es el que se utiliza para obtener la cantidad de agua dada la presión y viceversa:

$$\theta(\Psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left( 1 + \left( \frac{\Psi}{\Psi_d} \right)^n \right)^m} \quad (7)$$

donde:

$\theta$  es la cantidad de agua;  $\Psi$  es la presión;  $\theta_r$  y  $\theta_s$  son los contenidos volumétricos residual y a saturación respectivamente,  $\Psi_d$  es un valor característico de la presión,  $m$ ,  $n$  son parámetros de forma.



Si definimos  $\Psi(t_k)$  como la presión en el suelo en el tiempo  $t_k$ , la ecuación (6) se puede escribir:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{d\Psi(t_k)}{dt_k} = \frac{d}{dz} \left( K(\Psi(t_k)) \left( \frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1 \right) \right) + T \quad (8)$$

Escribiendo la ecuación (8) en diferencias finitas respecto del tiempo:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{\Delta t_k} = \frac{d}{dz} \left( K(\Psi(t_k)) \left( \frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1 \right) \right) + T \quad (9)$$

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{\Delta t_k} = \frac{d}{dz} \left( K(\Psi(t_k)) \left( \frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1 \right) \right) + T \quad (10)$$

Donde (9) es el modelo explícito y (10) el modelo implícito.

Para simplificar la escritura de las ecuaciones (9) y (10) se define el operador  $Op(\Psi(t_k))$  de la siguiente manera:

$$Op(\Psi(t_k)) = \frac{d}{dz} \left( K(\Psi(t_k)) \left( \frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1 \right) \right) + T \quad (11)$$

Usando (8) se puede obtener una regla de recurrencia para la solución de las presiones en el tiempo  $k$  dadas las presiones en el tiempo  $k - 1$ :

$$\Psi(t_{k+1}) = \frac{Op(\Psi(t_k)) \cdot \Delta t_k}{C(\Psi(t_k))} + \Psi(t_k) \quad (12)$$

Claramente puede observarse que en los puntos donde  $C(\Psi(t_k)) = 0$  no es posible aplicar este método. Para este caso se utiliza el método implícito (ver ecuación 10) junto con el algoritmo de optimización "Gradiente conjugado para problemas no lineales".

El algoritmo "Gradiente conjugado no lineal" requiere una función de error a minimizar, en este caso se utiliza la ecuación del modelo implícito (ver ecuación 10). La función de error  $E(\Psi(t_k))$  queda definida como:

$$E(\Psi(t_k)) = \left| C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{\Delta t_k} - \frac{d}{dz} \left( K(\Psi(t_k)) \left( \frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1 \right) \right) - T \right| \quad (13)$$

Paso 1: Se escoge  $x_0 = \Psi(t_k)$

Paso 2:  $\Delta x_0 = -\nabla_x E(x_0)$  para los puntos donde  $C(x_0) = 0$



Paso 3:  $\alpha_0 = \arg \min_{\alpha} (E(x_0 + \alpha \cdot \Delta x_0))$

Paso 4:  $x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot \Delta x_0$

Paso 5:  $s_0 = \Delta x_0$

Del paso 1 al paso 5 es la parte donde básicamente se inicia  $s_0$ , los siguientes pasos (6 - 10) son iterativos y el algoritmo termina cuando  $E(x_n)$  es pequeño.

Paso 6:  $\Delta x_n = -\nabla_x E(x_n)$  para los puntos donde  $C(x_n) = 0$

Paso 7:  $\beta = \frac{\Delta x_n^T \cdot \Delta x_n}{\Delta x_{n-1}^T \cdot \Delta x_{n-1}}$

Paso 8:  $s_n = \Delta x_n + \beta \cdot s_{n-1}$

Paso 9:  $\alpha_n = \arg \min_{\alpha} (E(x_n + \alpha \cdot \Delta x_n))$

Paso 10:  $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \cdot s_n$

Por último se escoge  $x_{n+1}$  como la solución a las presiones en el tiempo  $k$ , obsérvese que solo se aplica para los puntos donde  $C(x_n) = 0$ .

Para las derivadas espaciales (lado derecho de la ecuación) se utilizan los esquemas de diferencia finita centrada e interpolación con polinomios. La aproximación con polinomios permite aplicar derivadas de "cualquier" orden (fraccional o entera) sobre las derivadas espaciales.

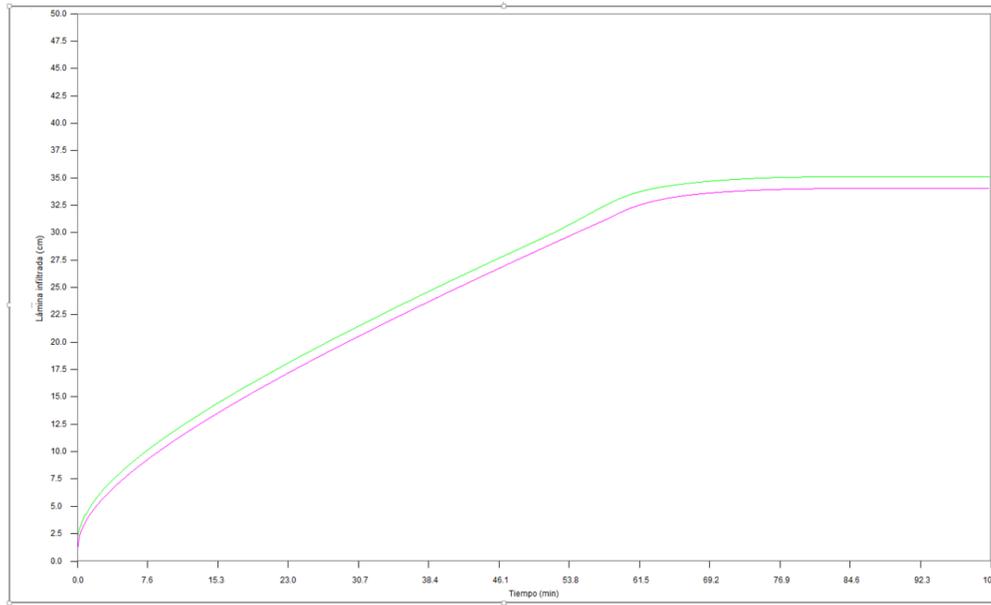
### Levenberg–Marquardt para Richards.

Para el método inverso de la ecuación de Richards se hace uso del algoritmo de Levenberg–Marquardt (1963) así como del algoritmo propuesto en los párrafos anteriores. En este caso se cuenta con un conjunto de datos que corresponden a alguna lámina infiltrada y los parámetros a obtener son la presión característica  $\Psi_d$  y la conductividad hidráulica a saturación  $K_s$ .

Respecto a los materiales utilizados en la implementación de estos algoritmos, cabe destacar que se utilizó el GPU de una PC a través de la plataforma OpenCl para hacer el cálculo del Jacobiano en el algoritmo Levenberg–Marquardt (cuatro cómputos de la ecuación de Richards en paralelo), de esta manera se logró una velocidad cuatro veces mayor que usando programación convencional. Exceptuando el Jacobiano antes mencionado, los demás algoritmos están programados en lenguaje C, C++.

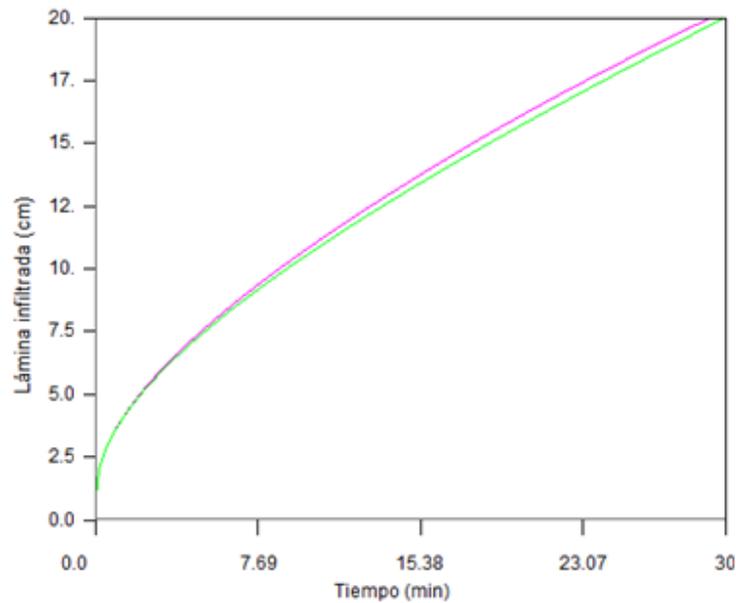
## Resultados

En la Figura 1 se pueden observar dos simulaciones utilizando el algoritmo propuesto en párrafos anteriores para los mismos parámetros físicos con dos diferentes discretizaciones. Puede observarse que el algoritmo es estable a discretizaciones poco finas, sin embargo el tiempo de simulación con estas discretizaciones es muy conveniente cuando hay que simular muchas veces el algoritmo.

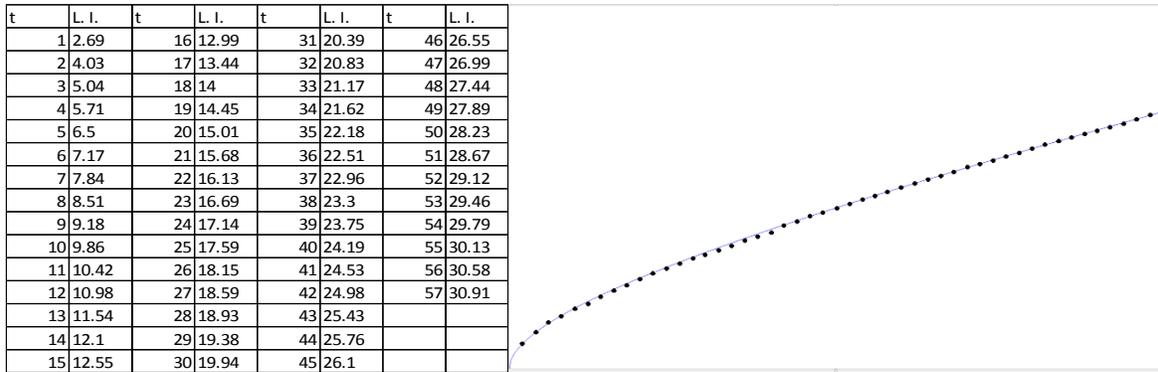


**Figura 1.** Evolución temporal de dos láminas infiltradas con los mismos parámetros físicos y diferentes discretizaciones. Parámetros físicos:  $\theta_s = 0.45$ ,  $\theta_r = 0.0$ ,  $\Psi_{ct\theta} = 4.5$ ,  $\Psi_{ini} = 0.012$ ,  $m = 0.381$ ,  $\eta = 3.63$ . Verde:  $\Delta_z = 3.125$ ,  $\Delta_t = .001$ , tiempo de simulación: .5 segundos. Magenta:  $\Delta_z = .75$ ,  $\Delta_t = .0001$ , tiempo de simulación 20 segundos.

En la Figura 2 de muestra la simulación de la ecuación de Richards con derivada fraccionaria. La Figura 3 ilustra el comportamiento de la lámina infiltrada al aplicar el algoritmo de Levenberg–Marquardt.



**Figura 2.** (Verde) Simulación de la ecuación de Richards. (Magenta) Simulación de la ecuación de Richards con derivada fraccionaria igual a 0.98 en la expresión  $\frac{d\Psi}{dz}$ .



**Figura 3.** (Izq.)Tabla con los datos de infiltración a optimizar, L.I. es la lámina infiltrada y t es el tiempo en minutos. (Derecha) Gráfica que resulta al aplicar el algoritmo de Levenberg–Marquardt, después de dos minutos y cinco iteraciones. Los parámetros de inicio son  $\Psi_d = -10$  y  $K_s = .3$ , Los parámetros finales son  $\Psi_d = -18.6$  y  $K_s = .325$ .

### Conclusiones

La solución planteada en este documento proporciona una rápida convergencia a los parámetros del sistema, ya que a diferencia de métodos como el de Laasonen (1949), no se requiere de una discretización espacio-temporal muy fina, debido a que este método usa el método explícito de diferencias finitas y cuando la capacidad específica es cero, se usa el gradiente conjugado no lineal, por lo que la discretización espacio-temporal no depende una de la otra.

Además, al probar el método para encontrar los parámetros de una prueba de infiltración, se observó que el tiempo de convergencia se redujo en aproximadamente un 20% del método convencional.

### Referencias

- Darcy, H. 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris.
- Marquardt, D.W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. Appl. Math. 11: 431-441.
- Laasonen, P. 1949. Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung, Acta Math., 81: 309-317.
- Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1: 318-333.
- Saint-Venant, A.J.C. Barre De. 1871. Théorie du mouvement non permant des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, 73: 147-154 y 237-240.
- Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 44: 892-898.